

「双曲平面上の幾何学」第5章の球面幾何学への応用

三次元の場合だけを考えるので $n = 3$ とする。P 平面の境界は球面 Γ 上の円であるから、球面上の円に関する定理のいくつかは、P 平面を利用して証明できる。

1 P 平面と Γ 上の円

簡単な計算で次が成り立つことがわかる。

定理 1. Γ 上の点 (a_1, a_2, a_3) を中心とし、半径 r ($0 < r \leq \frac{\pi}{2}$) の円 C に対して

$$l = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - \left(\frac{1}{2} \cos r\right) (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)$$

とすれば、 $\partial[l] = C$ である。特に、 $r = \frac{\pi}{2}$ のときは C は大円であり、 $[l]$ は $(0, 0, 0)$ を通る平面である。

P 平面は Γ に直交する球面または平面の Δ に含まれる部分であるから、次が成り立つ。

定理 2. h_1, h_2 を相異なる P 平面とすると、その境界の Γ 上の円 $\partial h_1, \partial h_2$ が直交するための必要十分条件は h_1 と h_2 が直交することである。

2 焦点と根軸

球面上の交わらない 2 つの円に対しても焦点と根軸が定義できる。

定理 3. C_1 と C_2 を Γ 上の相異なる円とし、 l_1, l_2 を $\partial[l_1] = C_1, \partial[l_2] = C_2$ となる V_+ の元とする。

(i) C_1 と C_2 は 2 点で交わる $\iff |l_1 \cdot l_2| < 1$

(ii) C_1 と C_2 は 1 点で接する $\iff |l_1 \cdot l_2| = 1$

(iii) C_1 と C_2 は交わらない $\iff |l_1 \cdot l_2| > 1$

証明 $(xl_1 + l_2)^2 = x^2 + 2l_1 \cdot l_2x + 1 = 0$ の実数解が 0, 1, 2 個であるための必要十分条件はそれぞれ $|l_1 \cdot l_2| < 1, = 1, > 1$ となることである。

$$W = \{l \in V \mid l^2 = 0\}, \quad L = \{c_1l_1 + c_2l_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$$

とすれば、上の条件は $W \cap L$ がそれぞれ $\{0\}, 1$ 直線, 2 直線となることと同値である。一方、 $L^\perp = \{m \in V \mid m \cdot l = 0 \text{ for } l \in L\}$ とすれば、 C_1 と C_2 が 2 点で交わる、1 点で接す

る, 交わらないための必要十分条件はそれぞれ $W \cap L^\perp$ が 2 直線, 1 直線, $\{0\}$ となることである。さらに, $W \cap L$ が $\{0\}$, 1 直線, 2 直線 となることはそれぞれ $W \cap L^\perp$ が 2 直線, 1 直線, $\{0\}$ となることと同値であるから, 結論が従う。 ■

定理 4. Γ 上に交わらない 2 つの円 C_1 と C_2 があるとす。このとき, Γ 上の相異なる 2 つの点 P_1 と P_2 が存在して Γ 上の円が C_1 と C_2 のいずれとも直交するための必要十分条件はその円が P_1 と P_2 を通ることである。

証明 l_1, l_2 を $\partial[l_1] = C_1, \partial[l_2] = C_2$ となる V_+ の元とする。定理 3 とその証明により, $P_i = [c_i l_1 + l_2]$ ($i = 1, 2$) が Γ 上の点となる相異なる実数 c_1, c_2 が存在する。 C を Γ 上の円とし, m を $\partial[m] = C$ となる V_+ の元とする。 C が C_1, C_2 に直交するための必要十分条件は定理 2 より, $m \cdot l_1 = m \cdot l_2 = 0$ であり, C が P_i を通るための必要十分条件は $m \cdot (c_i l_1 + l_2) = 0$ であることから結論が従う ■

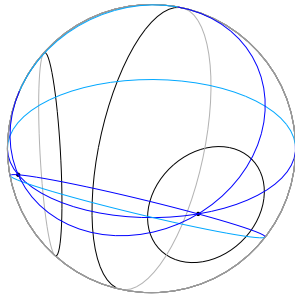


図 1

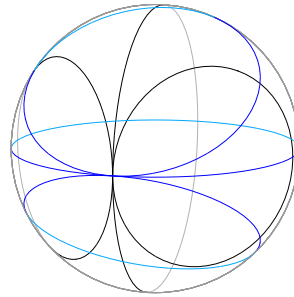


図 2

上の定理の P_1 と P_2 を C_1 と C_2 の焦点と呼ぶ。

$C_1 = \partial[l_1], C_2 = \partial[l_2]$ ($l_1, l_2 \in V_+$) を Γ 上の相異なる大円ではない円とする。 $o = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)$ とすれば, $[o] = (0, 0, 0)$ であるから, $m \cdot o = 0$ を満たす $\bar{0}$ でない V の元 m に対して $[m]$ は $[o]$ を通る P 平面であり, $\partial[m]$ は大円である。したがって, $C_0 = \partial[(o \cdot l_2)l_1 - (o \cdot l_1)l_2]$ は大円である。次に, P を C_1 と C_2 への接線¹の長さが等しい Γ 上の点とする。 C を中心が P で半径が接線の長さの Γ 上の円とする。 C は C_1 と C_2 の両方に直交するから, 定理 2 より, C_0 にも直交する。したがって, P は C_0 上の点である。故に, C_0 を C_1 と C_2 の根軸と定義してもよいであろう。 C_1 と C_2 が 2 点で交わる時は C_0 はその 2 交点を通る。 C_1 と C_2 が交わらないときは C_0 上の任意の点は C_1 と C_2 の焦点から等距離にある。

上の C_1 と C_2 が交わらないとし, その焦点を P_1 と P_2 とする。 l_1 と l_2 の一次結合 l で $l^2 > 0$ となるものに対する Γ 上の円 $\partial[l]$ の集合を考える。定理 2, 4 より, その中の任意の 2 つは交わらず, それらに対する焦点は P_1 と P_2 である。平面の場合に倣って, この集合を双曲的円系と呼ぶ (図 1 の黒い円)。また, P_1 と P_2 を通る Γ 上の円の集合を楕円的

¹ Γ 上の円 C の接線とは C に接する大円である。

円系と呼ぶ(図1の青い円)。

C_1 と C_2 が点 P で接しているときは, l_1 と l_2 の一次結合 l で $l^2 > 0$ となるものに対する Γ 上の円 $\partial[l]$ は P で C_1 に接する。このような円の集合を放物的円系と呼ぶ(図2の黒い円)。 $l_1 \cdot m = l_2 \cdot m = 0$ を満たす V_+ の元 m に対する Γ 上の円 $\partial[m]$ は P を通り, C_1, C_2 に直交する(図2の青い円)。

定理 5. Γ 上に同一の円系に属さず, 大円ではない3つの円があるとする。2つずつの円の根軸は2点で交わる(図3, 4, 5の青い円)。

証明 3つの円を C_1, C_2, C_3 とし, l_i を $\partial[l_i] = C_i$ となる V_+ の元とする ($i = 1, 2, 3$)。 $o = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)$, $m_{ij} = (o \cdot l_j)l_i - (o \cdot l_i)l_j$, $C_{ij} = \partial[m_{ij}]$ とすれば, 上でみたように, C_{ij} は C_i と C_j の根軸である。 m_{12}, m_{23}, m_{31} は線形従属であり, 仮定より, どの2つも線形独立である。したがって, $W = \{l \in V \mid l \cdot m_{12} = l \cdot m_{23} = l \cdot m_{31} = 0\}$ は V の二次元部分空間である。 W は V_- の元 $\frac{1}{2}o$ を含むから, $n_1^2 = n_2^2 = 0$ を満たし, 線形独立な元 n_1, n_2 を含む。 $[n_k]$ ($k = 1, 2$) は Γ 上の点であり, $m_{ij} \cdot n_k = 0$ であるから, C_{ij} に含まれる。 ■

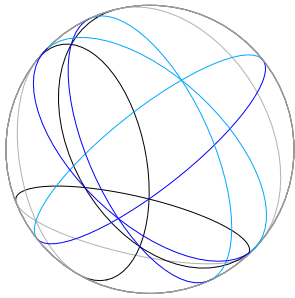


図 3

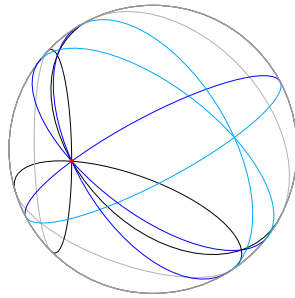


図 4

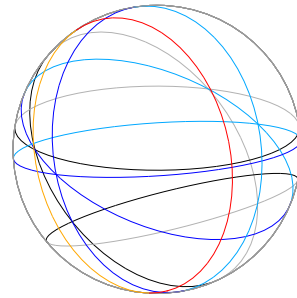


図 5

上の定理の2つの交点が3つの円の外側にあれば, 2つの交点の一つから, 3つの円に長さの等しい接線が引ける。したがって, 3つの円に直交する円が存在する(図5の赤い円)。

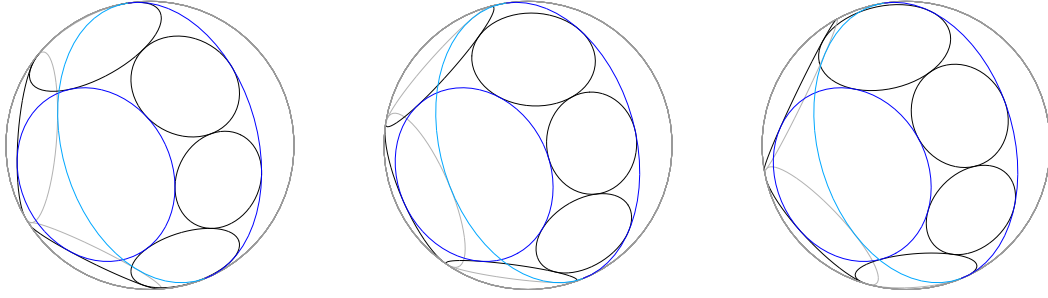
3 シュタイナーの定理

2次元の場合と同様に $m^2 \neq 0$ を満たす V の元 m に対して V の線形変換 β_m を

$$\beta_m(l) = l - \frac{2l \cdot m}{m^2} m$$

と定義する。この β_m は擬内積を保つから, $l^2 = 0$ ならば, $\beta_m(l)^2 = 0$ である。したがって, Γ 上の点 $[l]$ ($l^2 = 0$) を Γ 上の点 $[\beta_m(l)]$ へ移す写像が定義できる。この写像を α_m で表す。 α_m は Γ 上の円を Γ 上の円に移す。 $m^2 > 0$ のとき, α_m は Γ 上の円 $\partial[m]$ 上の点をそれ自身に移し, $\partial[m]$ の両側を入れ替える。また, 定理 2 より, $\partial[m]$ に直交する円をそれ自身に移す。

C_1, C_2 を Γ 上の交わらない円とし, この二円の焦点を $[l_0], [l_1]$ ($l_0, l_1 \in V$) とする。 $[l_0]$ の反対側の点を $[l_2]$ とし ($[l_0]$ と $[l_2]$ を結ぶ \mathbb{R}^3 の線分が Γ の直径), $m = (l_2 \cdot l_0)l_1 - (l_1 \cdot l_0)l_2$ とすれば, β_m は l_0 をそれ自身に移し, $l_1^2 = l_2^2 = 0$ であるから, l_1, l_2 をそれぞれ l_2, l_1 の定数倍に移す。したがって, $\alpha_m([l_0]) = [l_0], \alpha_m([l_1]) = [l_2], \alpha_m([l_2]) = [l_1]$ である。 C_1, C_2 の両方に直交する Γ 上の円は定理 4 より, $[l_0], [l_1]$ を通るから, α_m により, $\alpha_m(C_1), \alpha_m(C_2)$ に直交し, $[l_0], [l_2]$ を通る大円に移る。したがって, $[l_0], [l_2]$ は $\alpha_m(C_1), \alpha_m(C_2)$ の中心である。これにより, 普通の平面の場合と同様にシュタイナーの定理が証明できる。



4 モンジュの定理

Γ 上の大円でない 2 つの円に対して両方に接する大円で 2 つの円が大円の同じ側にあるものを外接線と呼び, 2 つの円が大円の反対側にあるものを内接線と呼ぶことにする。2 つの円 C_1, C_2 の半径がそれぞれ r_1, r_2 で中心間の距離が d であり, どちらの円も他方の外部にあるとき, $r_1 + d + r_2 > \pi$ ならば, 外接線は一つもなく, $r_1 + d + r_2 = \pi$ ならば, 外接線は一つだけであり, $r_1 + d + r_2 < \pi$ ならば, 外接線は丁度 2 つある。最後の場合に, 2 つの外接線の 2 つの交点を外接交点と呼ぶことにする。

定理 6. Γ 上に大円ではない 3 つの円があり, どの 2 つの円にも外接交点が存在するとする。2 つずつの円に対する外接交点合わせて 6 点を通る大円が存在する (図 6)。

証明 3 つの円を C_1, C_2, C_3 とし, l_i を $\partial[l_i] = C_i$ ($i = 1, 2, 3$) となる V_+ の元とする。 l_i の $o = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)$ の係数は 0 ではないので正であると仮定してよい。このとき, l を $\partial[l]$ が C_i と C_j に外接する大円となる V_+ の元とすれば, 定理 3 により, $l \cdot l_i = \pm 1, l \cdot l_j = \pm 1$ であるが, その符号は等しい。したがって, $l \cdot l_i = l \cdot l_j$ である。 m_{ij}^\pm を x_1, x_2, x_3 の係数が $l_i - l_j$ のそれらに等しく, $(m_{ij}^\pm)^2 = 0$ となる V の元とする。 $[m_{ij}^\pm]$ は Γ 上の点であり, 上の l に対して $l \cdot m_{ij}^\pm = 0$ であるから, C_i と C_j に外接する 2 つの大円の 2 交点である。 $n = m_{12}^+ * m_{23}^+ * o$ とすれば, $\partial[n]$ は大円である。 $n \cdot m_{12}^\pm = n \cdot m_{23}^\pm = 0$ であり, n の o の係数は 0 であり, $m_{12}^\pm + m_{23}^\pm + m_{31}^\pm$ は o の定数倍であるから, $n \cdot m_{31}^\pm = 0$ であ

る。したがって、 $\partial[n]$ は $[m_{12}^\pm], [m_{23}^\pm], [m_{31}^\pm]$ を通る。 ■

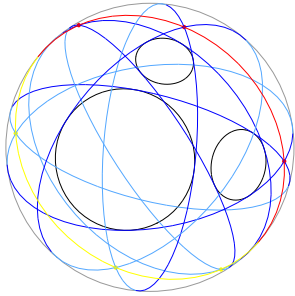


図 6

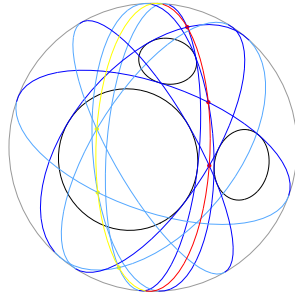


図 7

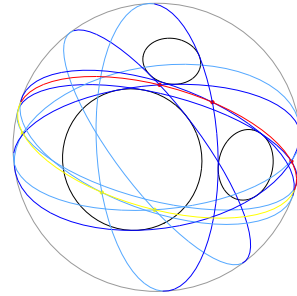


図 8

C_1, C_2, d, r_1, r_2 は上の通りとすれば、 C_1 と C_2 に内接線が丁度 2 つあるための必要十分条件は $r_1 + r_2 < d < \pi - |r_1 - r_2|$ である。このとき、2 つの内接線の 2 交点を内接交点と呼ぶことにする。上の定理と同様に、次の定理が証明できる。

定理 7. Γ 上に 3 つの円 C_1, C_2, C_3 があり、 C_1 と C_2 には外接交点が存在し、 C_1 と C_3 , C_2 と C_3 のそれぞれに内接交点が存在するとき、これらの 6 点を通る大円が存在する (図 7, 8)。

5 デザルグの定理

球面上の直線にあたるものは大円であるから、デザルグの定理も証明できる。

$$V_0 = \{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + o \in V \mid a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1\} \quad (o = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1))$$

とする。 V_0 の元 l に対して $l^2 = 0$ であるから、 $[l]$ は Γ 上の点である。 V_0 の相異なる元 l_1, l_2 で o, l_1, l_2 が線形独立となるものに対して $\partial[l_1 * l_2 * o]$ は $[l_1], [l_2]$ を通る大円であるから、次が成り立つ。

補題 8. V_0 の相異なる元 l_1, l_2, l_3 に対して $[l_1], [l_2], [l_3]$ が一つの大円上にあるための必要十分条件は l_1, l_2, l_3, o が線形従属となることである。

この補題と次の定理より、球面上でもデザルグの定理が成り立つことがわかる (図 9 参照)。 Γ 上の 2 点 P, Q を結ぶ \mathbb{R}^3 の線分が Γ の直径のとき、 P, Q を対極と呼ぶ。 V_0 の相異なる元 l, m に対して $[l], [m]$ が対極となるための必要十分条件は $l + m = 2o$ となることである。また、対極ではない Γ 上の 2 点を通る大円は唯一つである。

定理 9. l_i, m_i ($i = 1, 2, 3$) を V_0 の相異なる元で、6 点 $[l_i], [m_i]$ のどの 2 つも対極ではないとする。 l_i, m_i と異なる V_0 の元 p で $i = 1, 2, 3$ に対して l_i, m_i, p, o が線形従属となる

ものが存在すれば, V_0 の元 r_1, r_2, r_3 で $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ に対して l_i, l_j, r_k, o が線形従属, m_i, m_j, r_k, o も線形従属かつ r_1, r_2, r_3, o も線形従属となるものが存在する。

証明 仮定より, $m_i = s_i l_i + t_i p + u_i o$ を満たす実数 s_i, t_i, u_i が存在する。 $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1)$ および $(3, 1, 2)$ に対して $q_k = t_j m_i - t_i m_j$ とする。このとき, $t_j s_i l_i - t_i s_j l_j$ は q_k と o の一次結合である。仮定より, $[q_k] \neq [o]$ であるから, 実数 c_k, d_k で $r_k = c_k q_k + d_k o$ が V_0 の元となるものが存在する。この r_k は条件を満たす。 ■

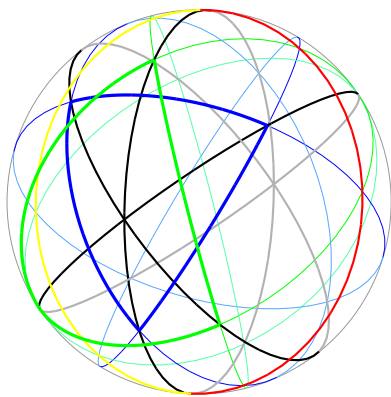


図 9

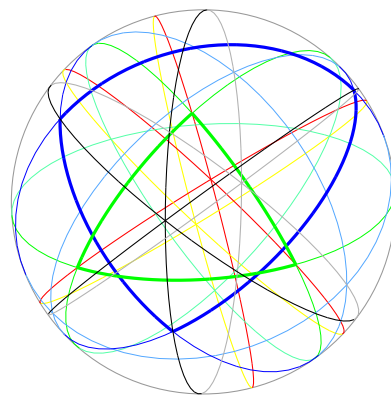


図 10

「双曲平面上の幾何学」2.3 節で述べたように, ユークリッド平面上の次の定理は双曲平面上ではデザルグの定理が姿を変えたものとみなせる。

「2つの三角形 ABC と $A'B'C'$ において A, B, C からそれぞれ $B'C', C'A', A'B'$ への垂線が一点で交われば, A', B', C' からそれぞれ BC, CA, AB への垂線も一点で交わる。」

球面上でも, この定理が成り立つ (図 10 参照) ことが次のようにしてわかる。

$$U = \{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}\}$$

は V の部分空間であり, $\bar{0}$ でない U の元 l に対して $\partial[l]$ は Γ の大円である。また, $\partial[l_1], \partial[l_2], \partial[l_3]$ が相異なる大円となる U の元 l_1, l_2, l_3 が線形従属であるための必要十分条件は $\partial[l_1], \partial[l_2], \partial[l_3]$ が 2 点で交わることである。

補題 10. V_0 の相異なる元 l_1, l_2 で $[l_1]$ と $[l_2]$ が Γ の対極ではないものと $\bar{0}$ でない U の元 m に対して $[l_1]$ と $[l_2]$ を通る大円が $\partial[m]$ に直交するための必要十分条件は l_1, l_2, o, m が線形従属なことである。

証明 仮定より, l_1, l_2, o は線形独立である。 $\partial[l_1 * l_2 * o]$ は $[l_1], [l_2]$ を通る大円であり, これと $\partial[m]$ が直交するための必要十分条件は $m \cdot (l_1 * l_2 * o) = 0$, 即ち, l_1, l_2, o, m が線形従属なことである。 ■

次の定理は $r_k = t_j m_i - t_i m_j$ とおけば, 定理 9 の証明と同様にして証明できる。

定理 11. l_1, l_2, l_3 を V_0 の相異なる元で $[l_1], [l_2], [l_3]$ のどの 2 つも対極ではないとし, m_1, m_2, m_3 を線形独立な U の元とする。 l_i と異なる V_0 の元 p で $i = 1, 2, 3$ に対して l_i, p, o, m_i が線形従属となるものが存在すれば, U の元 r_1, r_2, r_3 で $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ に対して l_i, l_j, o, r_k が線形従属, m_i, m_j, r_k も線形従属かつ r_1, r_2, r_3 も線形従属となるものが存在する。

6 四つの定理

ユークリッド平面上で成り立つ次の定理の球面版を考える。

「三角形 ABC と直線 l があるとき, A, B, C から l への垂線の足からそれぞれ BC, CA, AB への垂線は一点で交わる。」

o, V_0, U および対極の定義は前節の通りとする。 $V_+ \cap U$ の元 $l = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ に対して対極の関係にある 2 点

$$[p^\pm] \quad (p^\pm = \pm(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + o)$$

を大円 $\partial[l]$ の極と呼ぶ。 $Q = (b_1, b_2, b_3)$ を $\partial[l]$ 上の任意の点とすると $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ であるから, $[p^\pm] = \mp(a_1, a_2, a_3)$ との距離は $\frac{\pi}{2}$ である。 また, U の元 m に対して $p^\pm \cdot m = \pm l \cdot m$ であるから, 定理 2 より Γ の大円が大円 C に直交するための必要十分条件は C の極を通ることである。 したがって, C の極と異なる点を通して C に直交する大円は唯一つである。

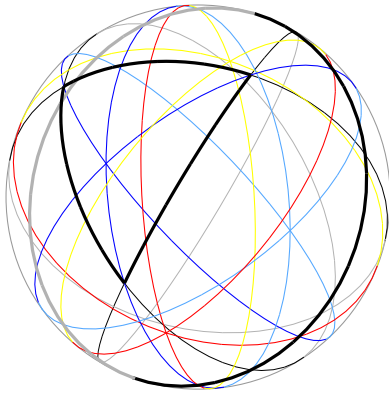


図 11

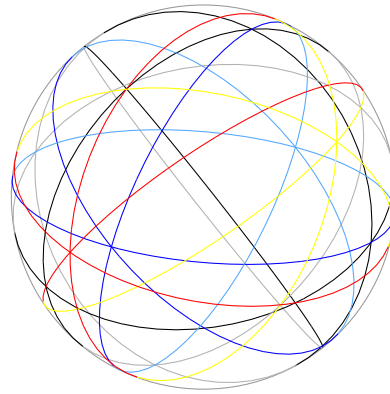


図 12

定理 12. C を Γ の大円とし, A_1, A_2, A_3 を Γ 上の一つの大円上にはない点で C の極ではないとする。 $i = 1, 2, 3$ に対して A_i を通って C に直交する大円 (図 11 の青い円) と C の交点を B_i とする。 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ に対して B_i が A_j, A_k を通る大円 D_{jk} の極でな

ければ, B_i を通って D_{jk} に直交する大円 (赤い円) を E_i とすれば, E_1, E_2, E_3 は 2 点で交わる。

証明 p を $\partial[p] = C$ となる V_+ の元とする。 $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ に対して l_i を $\partial[l_i]$ が A_j と A_k を通る大円となる V_+ の元とし, $m_i = (p \cdot l_k)l_j - (p \cdot l_j)l_k$ とする。 $m_i \cdot p = 0$ であるから, $\partial[m_i]$ は C に直交し, $\partial[l_j], \partial[l_k]$ の交点 A_i を通る大円である。したがって, $n_i = (m_i \cdot l_i)p - (p \cdot l_i)m_i$ とすれば, $n_i \cdot l_i = 0$ であるから, $\partial[n_i]$ は B_i を通って $\partial[l_i]$ に直交する。即ち, $\partial[n_i] = E_i$ である。 $n_1 + n_2 + n_3 = \bar{0}$ であるから, E_1, E_2, E_3 は 2 点で交わる。 ■

以下で, 上の定理の点と大円の役割を置き換えて得られる定理を考える。

定理 13. C_0, C_1, C_2, C_3 を Γ の相異なる大円でどの 3 つも 2 点で交わらないとする。 $i = 1, 2, 3$ に対して C_0 と C_i の交点を通って C_0 に直交する大円 (図 12 の青い円) を D_i とする。 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ に対して C_j と C_k の交点 A_i が D_i の極でなければ, A_i を通って D_i に直交する大円 (赤い円) を E_i とすれば, E_1, E_2, E_3 は 2 点で交わる。

証明 $i = 0, 1, 2, 3$ に対して l_i を $\partial[l_i] = C_i$ となる V_+ の元とする。 $m_i = (l_i \cdot l_0)l_0 - l_i$ とすれば, $\partial[m_i] = D_i$ である。 $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ に対して $n_i = (l_k \cdot m_i)l_j - (l_j \cdot m_i)l_k$ とすれば, $\partial[n_i] = E_i$ である。 $n_1 + n_2 + n_3 = \bar{0}$ であるから, E_1, E_2, E_3 は 2 点で交わる。 ■

ユークリッド平面上では, E_1, E_2, E_3 は C_0 に平行であるから, 互いに平行な直線であり, 上の定理は自明な主張となってしまう。

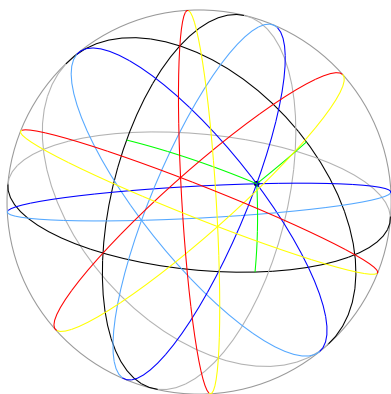


図 13

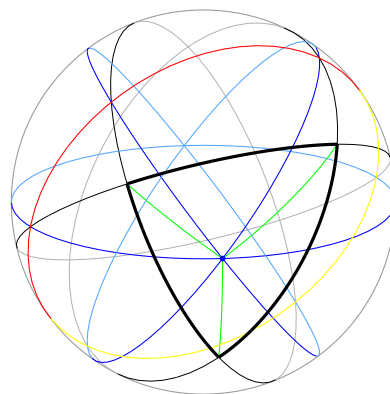


図 14

定理 14. C_1, C_2, C_3 を 2 点では交わらない Γ の相異なる大円とし, P をそれらの極ではない点とする。 $i = 1, 2, 3$ に対して P を通って C_i に直交する大円に直交し, P を通る大円 (図 13 の青い円) を D_i とする。 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ に対して C_j と C_k の交点 A_i が D_i の極でなければ, A_i を通って D_i に直交する大円 (赤い円) を E_i とすれば, E_1, E_2, E_3

は 2 点で交わる。

証明 $i = 1, 2, 3$ に対して l_i を $\partial[l_i] = C_i$ となる V_+ の元とし, p を $[p] = P$ となる V_0 の元とする。 $\partial[l_i * p * o]$ は P を通って C_i に直交する大円である。したがって, $m_i = l_i + (o \cdot l_i - p \cdot l_i)p + (p \cdot l_i)o$ とすれば, $m_i \cdot o = m_i \cdot p = 0$ であるから, $\partial[m_i] = D_i$ である。 $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ に対して $n_i = (l_j \cdot m_i)l_k - (l_k \cdot m_i)l_j$ とすれば, $\partial[n_i] = E_i$ である。 $n_1 + n_2 + n_3 = \bar{0}$ であるから, E_1, E_2, E_3 は 2 点で交わる。 ■

ユークリッド平面上では, 上の定理の E_1, E_2, E_3 は P の位置に依らずに, 三角形 $C_1C_2C_3$ の垂心で交わるが, 球面上では P の位置によって交点の位置も変わる。

定理 15. A_1, A_2, A_3, P をどの 3 つも一つの大円上にはない Γ 上の点とする。 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ に対して A_i と P を通る大円に直交し, P を通る大円 (図 14 の青い円) を D_i とし, A_j, A_k を通る大円と D_i の交点を B_i^\pm とすれば, $B_1^\pm, B_2^\pm, B_3^\pm$ は一つの大円 (赤い円) 上にある。

証明 $i = 1, 2, 3$ に対して l_i を $[l_i] = A_i$ となる V_0 の元とし, p, m_i を定理 14 の証明と同じとすれば, $[m_i] = D_i$ である。実数 c_i^\pm が存在して

$$n_i^\pm = (l_j \cdot m_i)l_k - (l_k \cdot m_i)l_j + c_i^\pm o$$

とおけば, $[n_i^\pm] = [B_i^\pm]$ となることが容易にわかる。

$$n_1^\pm + n_2^\pm + n_3^\pm - (c_1^\pm + c_2^\pm + c_3^\pm)o = \bar{0}$$

であるから, $B_1^\pm, B_2^\pm, B_3^\pm$ は一つの大円上にある。 ■

7 外心, 重心ともう一つの定理

V_0, o, U は 5 節の通りとし, m を U の元とする。 $\partial[m]$ は Γ の大円である。また, l が V_0 の元ならば, $l^2 = 0$ であり, $\beta_m(l)$ の $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)$ の係数も $\frac{1}{2}$ であるから, 3 節の β_m は V_0 をそれ自身に移す。

$$l_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + o \in V_0 \quad (i = 1, 2)$$

に対して $[l_1] = (-a_{11}, -a_{12}, -a_{13})$ と $[l_2] = (-a_{21}, -a_{22}, -a_{23})$ の Γ 上の距離は

$$\arccos(a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23}) = \arccos(l_1 \cdot l_2 + 1)$$

である。したがって, α_m は Γ 上の距離を保つから, $\partial[m]$ に関する鏡映と考えてよい。 l_1, l_2, l_3 を V_0 の相異なる元とする。 $1 \leq i < j \leq 3$ に対して $(l_i - l_j)^2 = -2l_i \cdot l_j, l_i \cdot (l_i - l_j) = -l_i \cdot l_j$ であるから, $\beta_{l_i - l_j}(l_i) = l_j$ である。また, $l_i - l_j \in U$ だから, 大円 $\partial[l_i - l_j]$ を Γ 上の線分

$[l_i][l_j]$ の垂直二等分線と考えてよい。 $\partial[l_i - l_j]$ 上の任意の点は $[l_i]$ と $[l_j]$ から等距離にあり、 $(l_1 - l_2) + (l_2 - l_3) + (l_3 - l_1) = \bar{0}$ であるから、次が成り立つ。

定理 16. Γ 上の三角形の三辺の垂直二等分線は 2 点で交わり、そのいずれもが 3 頂点から等距離にある。

上の定理の 2 交点のうち 3 頂点に近い方を三角形の外心と呼ぶ。 $l = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)$ を $l^2 < 0, a_0 > 0$ を満たす V の元とする。

$$\hat{l} = \frac{a_1}{d}x_1 + \frac{a_2}{d}x_2 + \frac{a_3}{d}x_3 + o \quad (d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2})$$

とすれば、 $[\hat{l}]$ は半直線 $(0, 0, 0)[l]$ と Γ の交点である。また、上の l_1, l_2, l_3 に対して $(l_i - l_j) \cdot (l_i + l_j) = 0$ であるから、 $[\widehat{l_i + l_j}]$ は $\partial[l_i - l_j]$ 上の点であり、 Γ 上の線分 $[l_i][l_j]$ 上の点でもあるから、 $[l_i][l_j]$ の中点である。 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ に対して $\partial[o * l_i * (l_j + l_k)]$ は $[l_i]$ と $[\widehat{l_j + l_k}]$ を通る大円であり、 $[\widehat{l_i + l_j + l_k}]$ も通るから、次が成り立つ。

定理 17. Γ 上の三角形の 3 中線は 2 点で交わる。

球面上では中点連結定理は成り立たないが、代わりに次が成り立つ。

定理 18. A_1, A_2, A_3 を一つの大円上にはない Γ 上の点とする。 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ に対して M_i が大円 A_jA_k 上の点で、大円 A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 が 2 点 Q^\pm で交わるならば、 A_iA_j と M_iM_j の交点を P_k^\pm とするとき、 $P_1^\pm, P_2^\pm, P_3^\pm$ は一つの大円上にある。特に、 M_i が線分 A_jA_k の中点のときには、この大円の極の一つは三角形 $A_1A_2A_3$ の外心である (図 15 参照)。

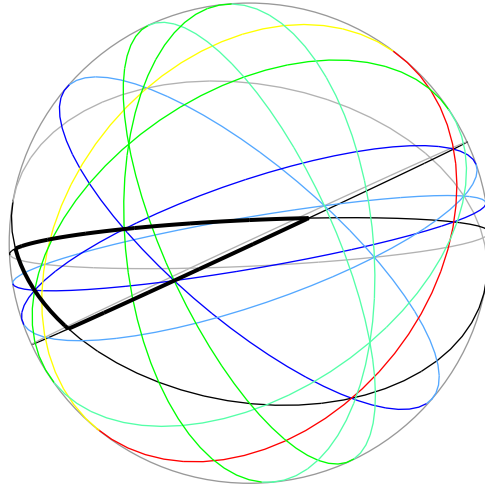


図 15

証明 $i = 1, 2, 3$ に対して l_i を $[l_i] = A_i$ となる V の元とする。仮定より、 l_1, l_2, l_3, o は線形独立であるから、 l_i を定数倍に置き換えて $Q^+ = [l_1 + l_2 + l_3 + o]$ であるとしてよい。このとき、 M_i は大円 A_jA_k と A_iQ^+ の交点の一つであるから、ある実数 c_i に対して

$M_i = [l_j + l_k + c_i o]$ となる。

$$(l_i + l_j + c_k o) * (l_i + l_k + c_j o) * o = l_j * l_k * o - l_k * l_i * o - l_i * l_j * o$$

であるから,

$$C = [m] \quad (m = l_1 * l_2 * o + l_2 * l_3 * o + l_3 * l_1 * o)$$

とおけば, 大円 C , $M_j M_k$, $A_j A_k = \partial[l_j * l_k * o]$ は 2 点で交わる。即ち, P_i^\pm は C 上にある。

次に, $l_i \in V_0$ であるとすれば, M_i は線分 $A_j A_k$ の中点であり, $\partial[l_j - l_k]$ は $A_j A_k$ の垂直二等分線である。 $m \cdot (l_j - l_k) = 0$ であるから, $\partial[l_j - l_k]$ は C に直交する。したがって, 三角形 $A_1 A_2 A_3$ の外心は C の極である。 ■

系 Γ 上の三角形 ABC の辺 AB , AC のそれぞれの中点を通る大円は辺 BC の垂直二等分線 (図 15 の緑の大円) に直交する。

証明 AB , AC の中点をそれぞれ D , E とし, BC と DE の交点を G とする。上の定理より, G は ABC の外心を極とする大円上にある。したがって, G を極とする大円は ABC の外心を通る。この大円は大円 BC に直交するから, 辺 BC の垂直二等分線であり, 大円 DE にも直交する。 ■

Γ 上の三角形 DEF の $\angle E$ と $\angle F$ が直角ならば, D は大円 EF の極である。したがって, D を通る任意の大円は EF に直交する。 $\angle E$ と $\angle F$ の少なくとも一方が直角でなければ, D は EF の極ではないから, D から EF への垂線は唯一つである。 $\angle D$ だけが直角ならば, DEF の三垂線は D で交わる。

V_0 の元 l に対して $\tilde{l} = l - o$ とすれば, $\partial[\tilde{l}]$ は $[l]$ を極の一つとする大円である。 l_1, l_2, l_3 を V_0 の相異なる元とする。 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ に対して $\partial[(\tilde{l}_k \cdot l_i) \tilde{l}_j - (\tilde{l}_j \cdot l_i) \tilde{l}_k]$ は $\partial[\tilde{l}_j]$ と $\partial[\tilde{l}_k]$ の交点を通るから, $[l_j]$ と $[l_k]$ を通る大円に直交する。また, $[l_i]$ も通るから, $[l_i]$ から $[l_j][l_k]$ への垂線である。

$$\left((\tilde{l}_3 \cdot l_1) \tilde{l}_2 - (\tilde{l}_2 \cdot l_1) \tilde{l}_3 \right) + \left((\tilde{l}_1 \cdot l_2) \tilde{l}_3 - (\tilde{l}_3 \cdot l_2) \tilde{l}_1 \right) + \left((\tilde{l}_2 \cdot l_3) \tilde{l}_1 - (\tilde{l}_1 \cdot l_3) \tilde{l}_2 \right) = \bar{0}$$

であるから, 次が成り立つ。

定理 19. Γ 上の三角形のどの角も直角でなければ, 各頂点から対辺への垂線は 2 点で交わる。

上の定理の 3 垂線が三角形の内部で交わるための必要十分条件は 3 つの角がすべて直角より小さいか大きいことである。