無限群が作用する扇を与える重み付き複体

土橋 宏康

平成 29 年 1 月 7 日

非特異扇

$N = \mathbf{Z}^r$ (r は 2 以上の整数)

定義 1

Σ : 非特異扇 $\Longleftarrow$

$$\Sigma \setminus \{\{0\}\} \ni {}^{\forall}\sigma = \mathbf{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_1 + \mathbf{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_2 + \cdots + \mathbf{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_i$$
$$\text{for } {}^{\exists}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_r\} : N \text{ の基底}$$

Σ の任意の元の任意の面も Σ に属す

Σ の任意の二つの元 σ, τ に対して $\sigma \cap \tau$ は σ, τ の面

${}^{\exists}X$: 非特異トーリック多様体 $\supset T \simeq (\mathbf{C}^*)^r$

$X \setminus T$ の双対グラフ $= \{p(\sigma \setminus \{0\}) \mid \{0\} \neq \sigma \in \Sigma\}$ (単体複体)

$(p : N_{\mathbf{R}} \setminus \{0\} \to S^{r-1} = (N_{\mathbf{R}} \setminus \{0\})/\mathbf{R}_{>0})$

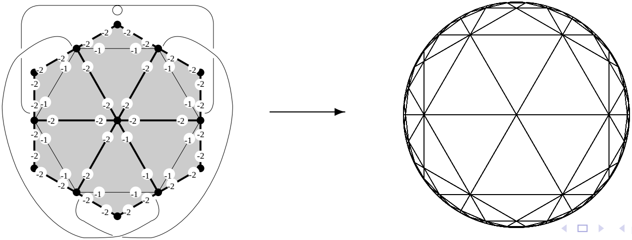
目的

非特異扇 Σ と $\mathrm{GL}(N)$ の部分群 Γ で以下の条件をみたすものを構成したい。

Σ : Γ-不変 ($\sigma \in \Sigma, \gamma \in \Gamma$ に対して $\gamma\sigma \in \Sigma$)
Σ/Γ : 有限
$^{\exists}U$: Γ-不変な開集合 $\subset X$: Σ に対応するトーリック多様体
　　Γ は U に固有不連続に作用

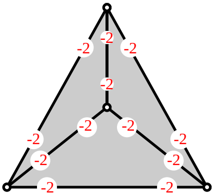
U/Γ の例 : Abel 多様体の退化族、カスプ特異点の特異点解消

上記の組 (Σ, Γ) を下図左のような単体を張り合わせたもので余次元 1 の単体の各頂点側に整数を付加したものから構成したい。

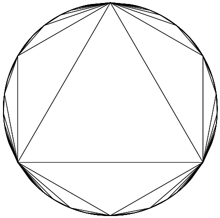


3 次元の扇を平面で切断した図

例

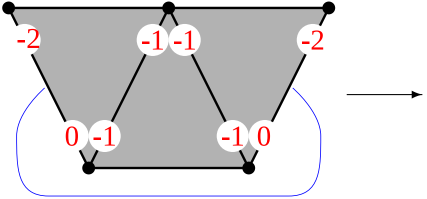


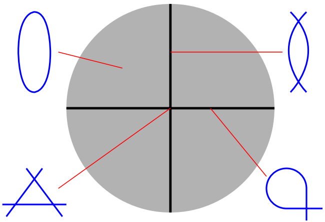
四面体の表面



3 次元の扇を
平面で切断した図

左下の図からは右下図のような楕円曲線の 2 次元退化族が得られる



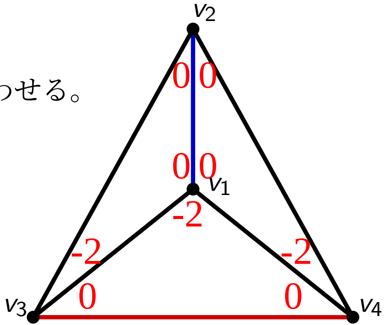


例

下図のものからは超楕円曲面 (楕円曲線上の楕円曲線束, $b_1 = 2$) の 2 次元退化族が得られる。

四面体 $\overline{v_1 v_2 v_3 v_4}$ の面どうしを張り合わせる。

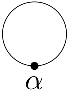
$\overline{v_1 v_2 v_3} \leftrightarrow \overline{v_1 v_2 v_4}$, $\quad \overline{v_1 v_3 v_4} \leftrightarrow \overline{v_2 v_4 v_3}$



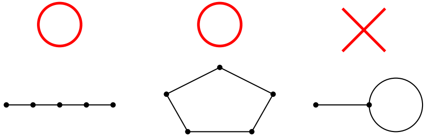
定義 2

$r-1$ 次元単体の集まりで $r-2$ 次元面どうしを次の条件 (i), (ii) をみたすように張り合わせたもの Δ を**単体系**と呼ぶ。

(記号: $\Delta^i := \{\Delta$ の i 次元の単体 $\}$,
$\Delta^i(\alpha) := \{\beta \in \Delta^i \mid \alpha$ は β の面 $\}$ for $\alpha \in \Delta^j$ $(0 \leq j < i))$
$n(\alpha, i)$: α の十分小さい近傍に含まれる i 次元単体の連結成分の個数 $(\geq \#\Delta^i(\alpha)))$



左図のとき、$n(\alpha, 1) = 2$



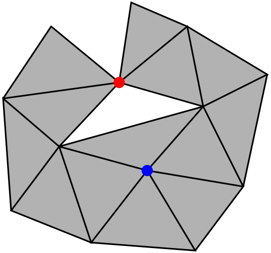
(i) $1 \leq n(\alpha, r-1) \leq 2$ for ${}^\forall\alpha \in \Delta^{r-2}$

(ii) Δ : 連結, i.e., ${}^\forall\alpha, {}^\forall\alpha' \in \Delta^{r-1}$ に対して
${}^\exists\alpha_1 = \alpha, {}^\exists\alpha_2, \ldots, {}^\exists\alpha_l = \alpha' \in \Delta^{r-1}$ s.t. $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \in \Delta^{r-2}$ for $1 \leq {}^\forall i < l$

余次元 1 と 2 の単体の周り

$\Delta_{\mathrm{in}}^{r-2} := \{\alpha \in \Delta^{r-2} \mid n(\alpha, r-1) = 2\}$,
$\Delta_{\mathrm{bd}}^{r-2} := \{\alpha \in \Delta^{r-2} \mid n(\alpha, r-1) = 1\}$

注 右図の赤い点のような $r-3$ 次元単体はない。



$\beta \in \Delta^{r-3}$, $n(\beta, r-1) < \infty$ のとき，

$n(\beta, r-2) = n(\beta, r-1) \iff \Delta_{\mathrm{bd}}^{r-2}(\beta) = \emptyset$

または

$n(\beta, r-2) = n(\beta, r-1) + 1 \iff \Delta_{\mathrm{bd}}^{r-2}(\beta) \neq \emptyset$

$\Delta_{\mathrm{in}}^{r-3} := \{\beta \in \Delta^{r-3} \mid n(\beta, r-2) = n(\beta, r-1) < \infty\}$,
$\Delta_{\mathrm{bd}}^{r-3} := \Delta^{r-3} \setminus \Delta_{\mathrm{in}}^{r-3}$

$\mathbf{Z}$-weight

$W := \{(\alpha, v) \in \Delta_{\mathrm{in}}^{r-2} \times \Delta^0 \mid v \in \alpha\}$

定義 3

写像 $\phi : W \to \mathbf{Z}$ を Δ の $\mathbf{Z}$-weight と呼ぶ。

$\mathbf{Z}$-weight を持つ有限単体系 Δ から以下のようにして扇を構成する

$f : \widetilde{\Delta} \to \Delta$: 被覆 (ある開集合への制限が普遍被覆となる) を構成

$\overline{v_1 v_2 \cdots v_r} \in \widetilde{\Delta}^{r-1}$, $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\}$: N の基底を選び、 $h(v_i) = \mathbf{e}_i$ とする。

$\overline{v_1' v_2 \cdots v_r} \in \widetilde{\Delta}^{r-1}$ ($\Longrightarrow \overline{v_2 \cdots v_r} \in \widetilde{\Delta}_{\mathrm{in}}^{r-2}$) のとき、

$$h(v_1) + h(v_1') + \sum_{i=2}^{r} \phi(\overline{v_2 \cdots v_r}, v_i) h(v_i) = 0$$

により、$h(v_1')$ を定め、$\cdots$ 写像 $h : \widetilde{\Delta}^0 \to N \setminus \{0\}$ を定めたとき、

$$\Sigma := \{\mathbf{R}_{\geq 0} h(v_1) + \cdots + \mathbf{R}_{\geq 0} h(v_l) \mid \overline{v_1 \cdots v_l} \text{ は } \widetilde{\Delta} \text{ の単体 }\} \cup \{\{0\}\}$$

が扇となるための条件を考える。

$\mathbf{Z}$-weight の満たすべき条件 (M)

$^\forall\alpha = \overline{w_1 w_2 \cdots w_{r-2}} \in \Delta_i^{r-3}$ に対して ϕ が次をみたす。
$v_1, \ldots, v_s \in \Delta^0$ $(s = n(\alpha, r-1))$ を α の周りの頂点、即ち、
$\overline{v_i v_{i+1} w_1 \cdots w_{r-2}} \in \Delta^{r-1}$ $(1 \le i \le s,\ v_{s+1} = v_1)$ としたとき、
次のいずれかが成り立つ。

(M-i) $^\exists \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{r-2} \in N$ s.t. $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1}, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{r-2}\}$ は N の基底

$$\mathbf{e}_{i-1} + \phi(\beta_i, v_i)\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1} + \sum_{j=1}^{r-2} \phi(\beta_i, w_j)\mathbf{f}_j = 0 \quad (1 \le i \le s)$$

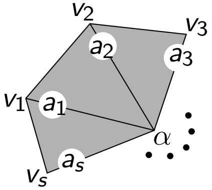
$$\beta_i = \overline{v_i w_1 \cdots w_{r-2}},\ \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_s,\ \mathbf{e}_{s+1} = \mathbf{e}_1$$

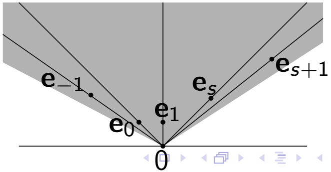
$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s$ は $\mathbf{R}_{\ge 0}\mathbf{f}_1 + \cdots + \mathbf{R}_{\ge 0}\mathbf{f}_{r-2}$ の周りを一回転している。

(M-ii) $^\exists \mathbf{e}_i \in \mathbf{Z}^2$ $(i \in \mathbf{Z})$ s.t. $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1}\}$ は $\mathbf{Z}^2$ の基底

$$\mathbf{e}_{i-1} + a_i \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1} = 0 \quad (i \in \mathbf{Z},\ a_i = \phi(\beta_j, v_j) \text{ if } i \equiv j \pmod{s})$$

$\{\mathbf{e}_i\}$ は $\mathbf{R}^2$ の半平面の片側にある。($^\forall a_i \le -2$ ならば OK。)



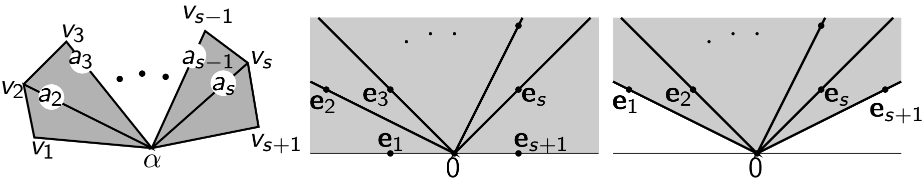


$\mathbf{Z}$-weight の満たすべき条件 (C)

${}^\forall\alpha = \overline{w_1 w_2 \cdots w_{r-2}} \in \Delta_b^{r-3}$ に対して ϕ が次をみたす。
$v_1, \ldots, v_{s+1} \in \Delta^0$ $(s = n(\alpha, r-1))$ を α の周りの頂点、即ち、
$\overline{v_i v_{i+1} w_1 \cdots w_{r-2}} \in \Delta^{r-1} \quad (1 \le i \le s)$ とする。
$s > 1$ のとき、$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を $\mathbf{Z}^2$ の基底とし、$\mathbf{e}_3, \ldots, \mathbf{e}_{s+1} \in \mathbf{Z}^2$ を

$$\mathbf{e}_{i-1} + a_i \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1} = 0 \quad (2 \le i \le s, \quad a_i = \phi(\overline{v_i w_1 \cdots w_{r-2}}, v_i))$$

により決めたとき、$\{\mathbf{e}_i\}$ は $\mathbf{R}^2$ の半平面の片側にある。



注 ${}^\forall a_i \le -2$ ならば条件をみたす。

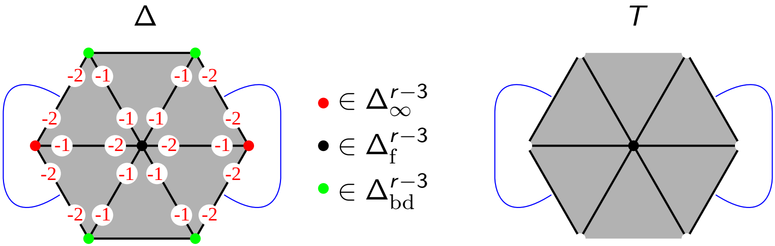
被覆

$\Delta_{\mathrm{f}}^{r-3} := \{\alpha \in \Delta_{\mathrm{in}}^{r-3} \mid \alpha$ が (M-i) のとき $\}$, $\Delta_{\infty}^{r-3} := \Delta_{\mathrm{in}}^{r-3} \setminus \Delta_{\mathrm{f}}^{r-3}$

Δ を条件 (M), (C) をみたす **Z**-wieght ϕ を持つ有限単体系とする。
(**注** $\Delta_{\mathrm{bd}}^{r-3} = \emptyset$ であっても、Δ は位相多様体の単体分割とは限らない。)

$T := \bigcup_{\alpha \in \Delta_o} \alpha^o$: 連結位相多様体 ($\Delta_o := \Delta^{r-1} \cup \Delta_{\mathrm{in}}^{r-2} \cup \Delta_{f}^{r-3}$,

$$\alpha^o = \begin{cases} \mathrm{Int}(\alpha) & (\dim \alpha \geq 1) \\ \alpha & (\dim \alpha = 0) \end{cases})$$



定理 1 と定理 2

以下 $r \geq 3$ とする。

定理 1

$^{\exists}\widetilde{\Delta}$: 単体系, $^{\exists}f : \widetilde{\Delta} \to \Delta$ 被覆写像, $f_{|f^{-1}(T)}$ は普遍被覆となる。

定理 2

$^{\exists}h : \widetilde{\Delta}^0 = \{\widetilde{\Delta}$の頂点の集合$\} \to N \setminus \{0\}$ *s.t.*
$\{h(v_1), \ldots, h(v_r)\}$: *a basis of* N *for* $^{\forall}\overline{v_1 \cdots v_r} \in \widetilde{\Delta}^{r-1}$,

$$h(v) + h(v') + \sum_{j=1}^{r-1} \tilde{\phi}(\beta, w_j) h(w_j) = 0 \tag{1}$$

for $^{\forall}\beta = \overline{w_1 \cdots w_{r-1}} \in \widetilde{\Delta}^{r-2}_{\mathrm{in}}$, $\overline{vw_1 \cdots w_{r-1}}, \overline{v'w_1 \cdots w_{r-1}} \in \widetilde{\Delta}^{r-1}$.

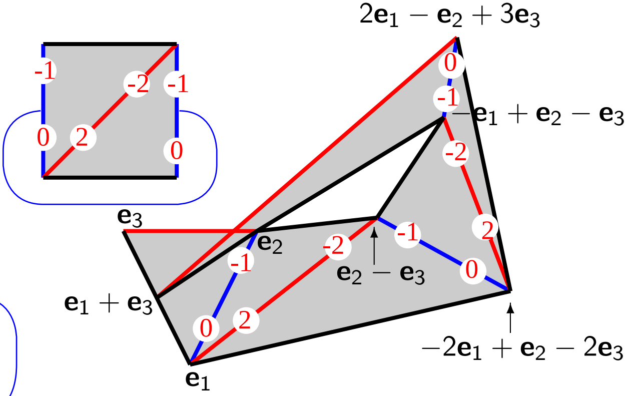
Σ が扇にならない例

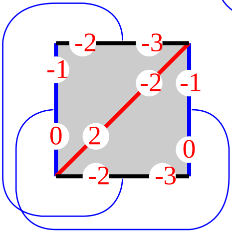
$\Sigma := \{\mathbf{R}_{\geq 0} h(v_1) + \cdots + \mathbf{R}_{\geq 0} h(v_i) \mid \overline{v_1 \cdots v_i}$ は $\widetilde{\Delta}$ の単体 $\} \cup \{\{0\}\}$

注 Σ は扇とは限らない。

左下図の Δ は 2 次元トーラスの三角形分割
条件 (M) をみたす。

右図は (C) を
みたさない。





Σ が扇となるための条件を考える

$\bar{h} : \tilde{\Delta} \to S^{r-1} (= (N_{\mathbf{R}} \setminus \{0\}) / \mathbf{R}_{>0})$ を以下のように定める。
$\alpha = \overline{v_1 v_2 \cdots v_r} \in \tilde{\Delta}^{r-1}$ のとき α から S^{r-1} への写像 $\bar{h}_\alpha$ を

$$\bar{h}_\alpha(t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_r v_r) = p(t_1 h(v_1) + t_2 h(v_2) + \cdots + t_r h(v_r))$$

と定める ($p : N_{\mathbf{R}} \setminus \{0\} \to S^{r-1}$ は自然な射影)。
$\bar{h} := \{\bar{h}_\alpha\}_{\alpha \in \tilde{\Delta}^{r-1}}$ $\quad (\alpha, \beta \in \tilde{\Delta}^{r-1}, \alpha \cap \beta \neq \emptyset$ のとき $\bar{h}_{\alpha|\alpha\cap\beta} = \bar{h}_{\beta|\alpha\cap\beta})$

命題 3

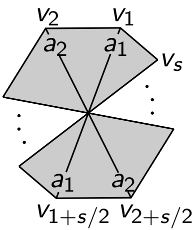
$\bar{h}_{|f^{-1}(T)}$ は局所同相写像である。

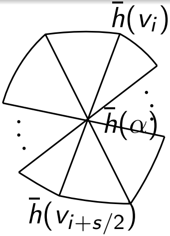
$y \in S^{r-1}$ の対称点を y^* で表す。$(y = p(v) \Longrightarrow y^* = p(-v))$
$y_1, y_2 \neq y_1^* \in S^{r-1}$ に対して
$\overline{y_1 y_2} = p(\{(1-t)z_1 + tz_2 \mid 0 \leq t \leq 1\})$ とする。$(z_i \in p^{-1}(y_i))$

定義 S^{r-1} の部分集合 X が $x, y \neq x^* \in X \Longrightarrow \overline{xy} \subset X$ をみたすとき、凸であるという。

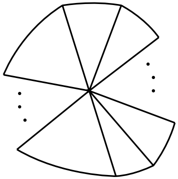
定義 4

$\Delta_{\mathrm{f}}^{r-3} \ni \alpha = \overline{w_1 \cdots w_{r-2}}$: symmetric $\Longleftarrow s = n(\alpha, r-1)$ が偶数であり,
$\overline{v_i v_{i+1} w_1 \cdots w_{r-2}} \in \Delta^{r-1}$ $(1 \le i \le s,\ v_{s+1} = v_1)$ とするとき
$\phi(\overline{v_1 w_1 \cdots w_{r-2}}, v_i) = \phi(\overline{v_{i+s/2} w_1 \cdots w_{r-2}}, v_{i+s/2})$ $(1 \le i \le s/2)$.





symmetric のとき
左図のようになり、
右図のようには
ならない。



$h(v_i)$, $h(v_{i+s/2})$, $h(w_j)$ $(1 \le j \le r-2)$ は同一超平面上にある。

定理 4

Δ の $\mathbf{Z}$-*weight* が *(M), (C)* をみたし、$\Delta_{\mathrm{f}}^{r-3}$ の各元が *symmetric* ならば,
$\bar{h}$ は *injective* であり, その像は凸である。*($\Longrightarrow$ Σ は扇である。)*

定理 4 の証明

E. B. Vinberg, Discrete Linear Groups generated by Reflections, Math. USSR Izvestija Vol. 5 (1971), 1083-1119. の中の segment という idea を使う。

定義 5

s : a segment on $\widetilde{\Delta} \Longleftarrow s : [0,1] \to \widetilde{\Delta}$ は単射連続写像であり,
$(\bar{h}\circ s)(1) \neq (\bar{h}\circ s)(0)^*$ のとき $\mathrm{Im}(\bar{h}\circ s) = \overline{(\bar{h}\circ s)(0)(\bar{h}\circ s)(1)}$
$(\bar{h}\circ s)(1) = (\bar{h}\circ s)(0)^*$ のときは 任意の $t \in (0,1)$ に対して

$$\mathrm{Im}(\bar{h}\circ s) = \overline{(\bar{h}\circ s)(0)(\bar{h}\circ s)(t)} \cup \overline{(\bar{h}\circ s)(t)(\bar{h}\circ s)(1)}$$

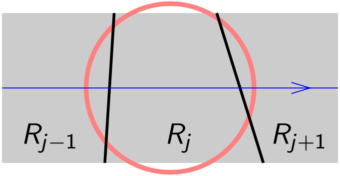
$\widetilde{\Delta} \ni {}^\forall x_0 \neq {}^\forall x$ に対して
$s(0) = x_0$, $s(1) = x$ となる segment s が存在することを示せばよい。

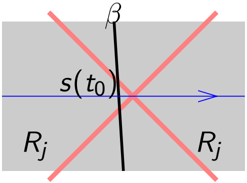
x_0 を固定する。 $x_0 \in \alpha_0$ となる $\alpha_0 \in \widetilde{\Delta}^{r-1}$ を一つ選ぶ。
$\Lambda_0 = \{\alpha_0\}$, $\Lambda_1 := \{\alpha \in \widetilde{\Delta}^{r-1} \mid \dim \alpha_0 \cap \alpha = r-2\}$,
$\Lambda_{i+1} := \{\alpha \in \widetilde{\Delta}^{r-1} \setminus (\Lambda_{i-1} \cup \Lambda_i) \mid \dim \alpha \cap \beta = r-2 \text{ for } {}^\exists\beta \in \Lambda_i\}$,
$R_i := \bigcup_{\alpha\in\Lambda_i} \alpha \implies \widetilde{\Delta} = \bigcup_{i\geq 0} R_i$

定理 4 の証明の続き

次を i に関する帰納法で証明する。

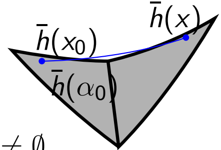
$R_i \ni {}^\forall x \neq x_0$ に対して $s(0) = x_0,\ s(1) = x$ となる segment s が存在し、
(A) $\mathrm{Im}(s) \cap \beta^o = \{s(t_0)\}$ $(\beta \in \widetilde{\Delta}^{r-2},\ t_0 \in (0,1))$ ならば
$s((t_1, t_0)) \subset R_j,\ s((t_0, t_2)) \subset R_{j+1}$ for ${}^\exists t_1 < t_0 < {}^\exists t_2,\ 0 \leq {}^\exists j < i$
をみたす。





$i = 0, 1$ のときは正しい。

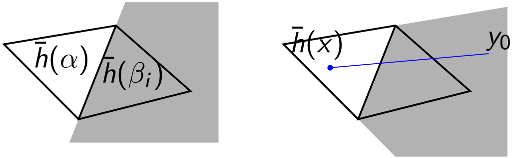
(M), (C) と $\Delta_{\mathrm{f}}^{r-3}$ の各元が symmetric
という条件より右図のようにはならない。
$\because x \in \alpha_1 \in \Lambda_1$ のとき、 $\overline{\bar{h}(x_0)\bar{h}(x)} \cap \bar{h}(\alpha_0 \cap \alpha_1) \neq \emptyset$

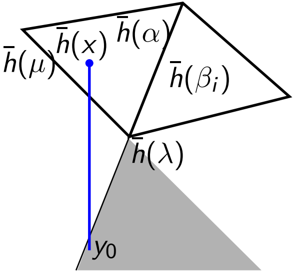


定理 4 の証明の続き

$i(\geq 1)$ まで正しいと仮定し、$x \in R_{i+1}$ とする。
$x \in {}^{\exists}\alpha \in \Lambda_{i+1} \implies {}^{\exists}\beta_i \in \Lambda_i$ s.t. $\dim \alpha \cap \beta_i = r-2$,
$y_0 := \bar{h}(x_0)$ は左下図の灰色の領域内にある ($\because$ 条件 (A))。

下中図の場合は OK, 右下図のような場合を考える。





${}^{\exists}\mu : \alpha$ の $r-2$ 次元面 s.t. $\bar{h}(\mu) \cap \overline{y_0\bar{h}(x)} \neq \emptyset$

以下で ${}^{\exists}\beta_i' \in \Lambda_i$ s.t. $\mu = \alpha \cap \beta_i'$ を示す。
$\lambda := \mu \cap (\alpha \cap \beta_i) \implies \dim \lambda = r-3$

($\because$ α は $r-1$ 次元単体, $\dim \mu = \dim(\alpha \cap \beta_i) = r-2$).

$\lambda \in \widetilde{\Delta}_f^{r-3}$ $(\because \lambda^o(\subset R_i)$ の任意の点と x_0 は segment で結べる。)

$\Longrightarrow \widetilde{\Delta}^{r-1}(\lambda) = \{\alpha, \beta_i, \ldots, \beta_j, \beta'_{j+1}, \ldots, \beta'_i\}$ $(j = i - \frac{1}{2}n(\lambda, r-1) + 1)$

$\beta_k \cap \beta_{k+1}, \beta'_k \cap \beta'_{k+1} \in \widetilde{\Delta}^{r-2}(\lambda)$ for $j \le k < i$ $(\beta'_j = \beta_j)$, $\beta'_i \cap \alpha = \mu$.

w を λ の近くの β_i^o の点とする。

$\Longrightarrow \overline{y_0 \bar{h}(w)} \cap \bar{h}(\beta_k \cap \beta_{k+1}) \neq \emptyset$ for $j \le {}^\forall k < i$.

$(\because \lambda$ は symmetric$)$

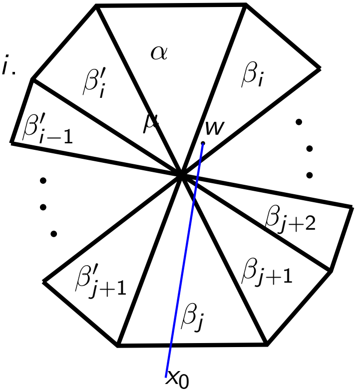
$\Longrightarrow \beta_{i-1} \in \Lambda_{i-1} \Longrightarrow \beta_{i-2} \in \Lambda_{i-2}$

$\Longrightarrow \cdots$ $\beta_j \in \Lambda_j$ $(\because$ 条件 (A)$)$.

$\Longrightarrow \beta'_{j+1} \in \Lambda_{j+1} \Longrightarrow \beta'_{j+2} \in \Lambda_{j+2}$

$\Longrightarrow \cdots$ $\beta'_i \in \Lambda_i$.

(証明終)



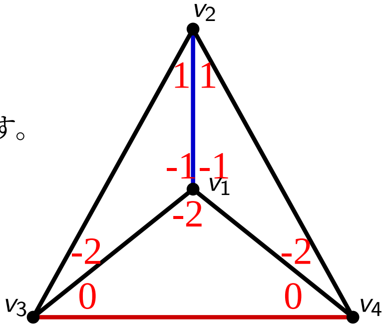
注 1

注 1. $\Delta_{\mathrm{f}}^{r-3}$ の元が symmetric でなくても $\bar{h}$ が injective になることもある。

四面体 $\overline{v_1 v_2 v_3 v_4}$ の面どうしを

$\overline{v_1 v_2 v_3} \leftrightarrow \overline{v_1 v_2 v_4}, \quad \overline{v_1 v_3 v_4} \leftrightarrow \overline{v_2 v_3 v_4}$

と張り合わると条件 (M), (C) を満たす。
黒い辺は symmetric ではない。



注 2

注 2. $\bar{h}$ が injective でなくても Σ が扇になることもある。

下図は Δ が 2 次元トーラスの三角形分割となるものの $\tilde{\Delta}$ の一部分、条件 (M) をみたす。
$\Gamma(\simeq \mathbf{Z}^2)$ の部分群 $\Gamma_0(\simeq \mathbf{Z})$ で $^\forall\gamma \in \Gamma_0$, $^\forall x \in \tilde{\Delta}$ に対して
$\bar{h}(\gamma x) = \bar{h}(x)$ となるものがある。