「双曲平面上の幾何学」の問題 2.24 のヒントへの補足

円を極限円に置き換えてもモンジュの定理が成り立つ。θ_0 を極限円とし,

$$l_0 = a_0 x + b_0 y + c_0(x^2 + y^2 + 1)$$

を $[l_0]$ が Γ と θ_0 の接点となる V の元とする。次の定理が成り立つことは容易にわかる。

定理 1. 正の実数 f_0 が存在して V_- または V_+ の元 m に対して $[m]$ が θ_0 上の P 点または θ_0 の接線であるための必要十分条件は $|l_0 \cdot m| = f_0$ となることである。

θ_1 を θ_0 の外にある P 円 (または等距離曲線) とし, l_1 を $[l_1]$ が θ_1 の中心となる V_- の元とする。$c_0 \neq 0$ であるから $c_0 > 0$ と仮定してよい。このとき, $m \in V_+$ に対して $[m]$ が θ_0 と θ_1 の外 (内) 接線ならば, $(l_0 \cdot m)(l_1 \cdot m) > 0$ (< 0) であるから, θ_1 の半径を r とし,

$$l_{01}^{\pm} = f_0^{-1} l_0 \pm \left(\frac{e^r - e^{-r}}{2}\right)^{-1} l_1$$

(θ_1 が等距離曲線のときは $e^r - e^{-r}$ を $e^r + e^{-r}$ に置き換える) とおけば, 上の定理により, θ_0 と θ_1 の内接線の交点は $[l_{01}^+]$ であり, 外接線の交点または両方に直交する P 直線は $[l_{01}^-]$ である。