

扇を用いた 3次元非孤立対数的標準特異点の構成

土橋 宏康

平成 30 年 3 月 9 日

このスライドと同じものが以下の URL からダウンロードできる。

<http://www014.upp.so-net.ne.jp/GeomMus/>

また、この話の中で 4 次元以上でも成り立つものがあり、その一部は上の URL からダウンロードできる”Fans consisting of infinitely many non-singular cones” に書いてある。

1. 無限個の非特異錐からなる扇 Σ と Σ に作用する群 Γ の構成
2. Σ と Γ から得られる複素多様体内のある解析的部分集合が、contraction できることの証明の概略
3. いくつかの例
4. 次数 2 の Siegel 上半空間の商空間のコンパクト化との関係

$N = \mathbf{Z}^r$ (r は 2 以上の整数)

定義 1

Σ : 非特異扇 \Leftarrow

$$\Sigma \setminus \{\{0\}\} \ni \forall \sigma = \mathbf{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_1 + \mathbf{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_2 + \cdots + \mathbf{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_i \\ \text{for } \exists \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_r\} : N \text{ の基底}$$

Σ の任意の元の任意の面も Σ に属す

Σ の任意の二つの元 σ, τ に対して $\sigma \cap \tau$ は σ, τ の面

$\exists Y$: 非特異トーリック多様体 $\supset T \simeq (\mathbf{C}^*)^r$

$Y \setminus T$ の双対グラフ = $\{p(\sigma \setminus \{0\}) \mid \sigma \in \Sigma \setminus \{\{0\}\}\}$ (単体復体)

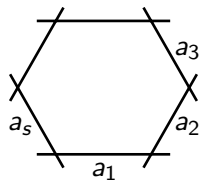
$$(p : N_{\mathbf{R}} \setminus \{0\} \rightarrow S^{r-1} = (N_{\mathbf{R}} \setminus \{0\})/\mathbf{R}_{>0})$$

2次元カスプ特異点

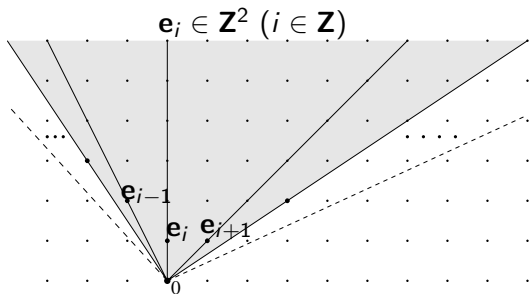
2次元カスプ特異点：特異点解消の例外集合が有理曲線の輪

特異点解消は右下図のような扇から構成される

この扇は有理曲線の自己交点数 a_i から構成される ($\forall a_i \leq -2, \exists a_i < -2$)



$$\mathbf{e}_{i-1} + a_{[i]} \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1} = 0$$

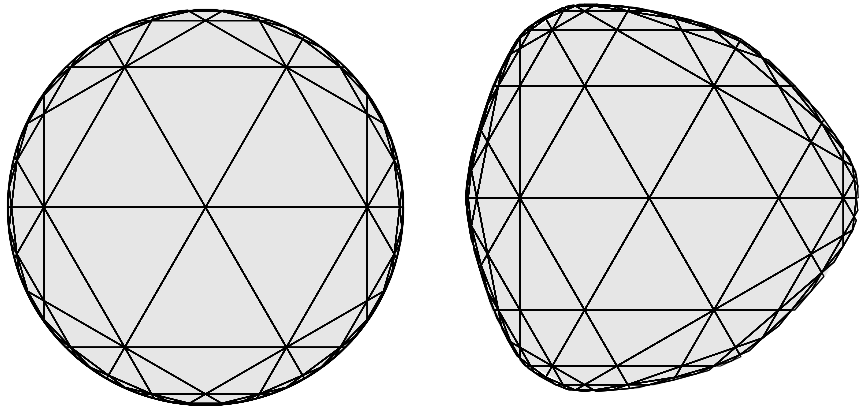


$$\gamma \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i+s}$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a_s \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$$

3次元カस्प特異点を与える扇の例

3次元の扇を平面で切断した図

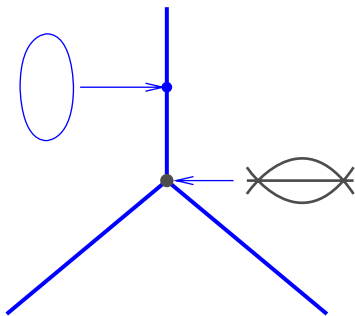
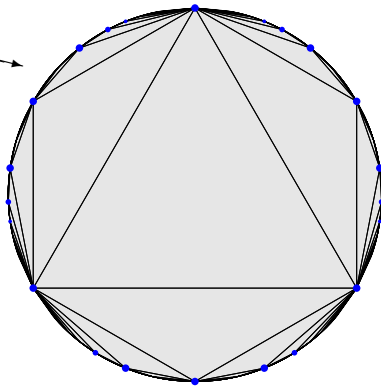


例外集合はコンパクトトーリック曲面からなり、双対グラフは位相曲面の三角形分割となる。

非孤立特異点を与える扇の例 1

3次元の扇を平面で切断した図

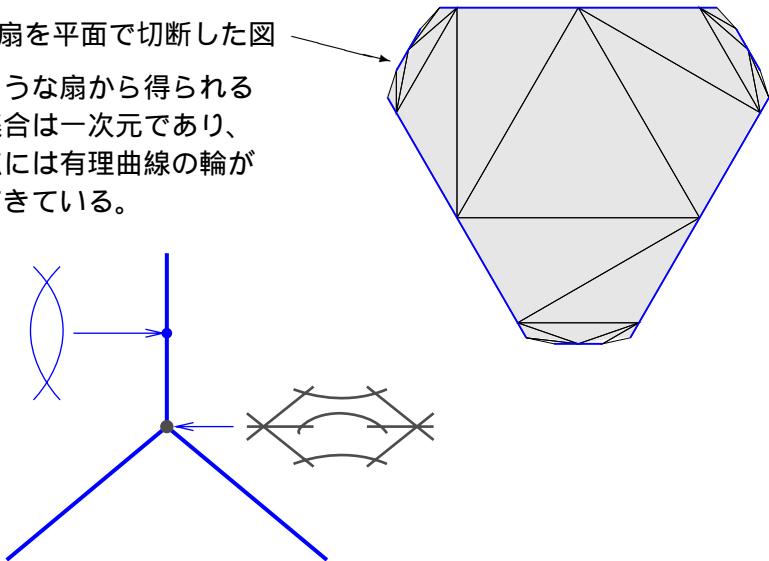
右図のような扇から得られる
特異点集合は一次元であり、
一般の点には楕円曲線が
つぶれてきている。



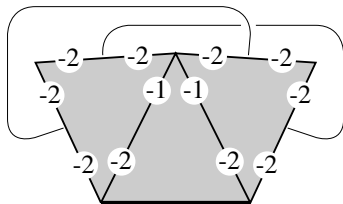
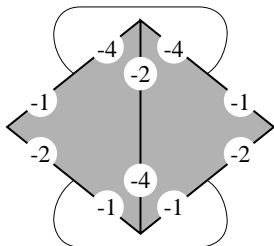
非孤立特異点を与える扇の例 2

3次元の扇を平面で切断した図

右図のような扇から得られる
特異点集合は一次元であり、
一般の点には有理曲線の輪が
つぶれてきている。



扇の構成方法の概略



上図のような整数の付加された三角形分割 Δ から非特異扇を構成する。
 Δ のある被覆 $\tilde{\Delta}$ の一つの三角形 $\overline{v_1 v_2 v_3}$ の頂点 v_i に e_i を対応させる。

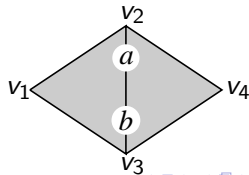
($\{e_1, e_2, e_3\}$ は $N = \mathbb{Z}^3$ の基底)

右下図のように二つの三角形 $\overline{v_1 v_2 v_3}$ と $\overline{v_2 v_3 v_4}$ が辺 $\overline{v_2 v_3}$ で隣り合っているとき、

v_4 に対応する N の元 e_4 を等式

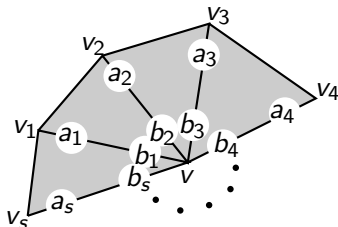
$$e_1 + ae_2 + be_3 + e_4 = 0$$

で定める。



重み付き三角形分割

Δ : コンパクト位相曲面 (境界を持ってよい) の三角形分割であり、境界に含まれない各辺の両端に整数が付加されていて、各頂点 v は次の三つの条件 (1), (2), (3) のいずれかを満たすとする。



(1) v は Δ の内点で v に集まる辺上の整数を上図の通りとしたとき、整数列 $[[a_1, a_2, \dots, a_s]]$ が操作:

(*) -1 に等しい数を取除き, その両隣にあった数に 1 を加える
(例 $[[\underline{-1}, -3, -2, -4]] \rightarrow [[-2, -2, -3]]$)

を (0 回以上) 繰り返したとき、 $[[1, 1, 1]]$ または $[[a, 0, -a, 0]]$ ($a \in \mathbf{Z}$) となり、

条件 (1) の続き

さらに,

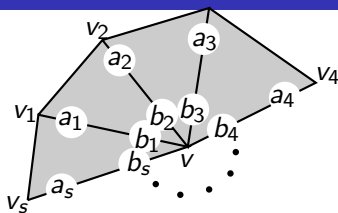
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -a_1 & 0 \\ 0 & -b_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -a_2 & 0 \\ 0 & -b_2 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -a_s & 0 \\ 0 & -b_s & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

を満たす。

$\iff \exists \mathbf{e}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s \in N$ s.t. $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1}, \mathbf{e}\} : \text{a basis of } N$ ($\mathbf{e}_{s+1} = \mathbf{e}_1$),
 $\mathbf{e}_{i-1} + a_i \mathbf{e}_i + b_i \mathbf{e} + \mathbf{e}_{i+1} = \mathbf{0}$ ($1 \leq i \leq s$, $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_s$, $\mathbf{e}_{s+1} = \mathbf{e}_1$),
 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s$ は \mathbf{e} の周りを丁度一回りしている。

$\implies \{\text{faces of } \mathbf{R}_{\geq 0} \mathbf{e} + \mathbf{R}_{\geq 0} \mathbf{e}_i + \mathbf{R}_{\geq 0} \mathbf{e}_{i+1} \mid 1 \leq i \leq s\}$ は扇である。

条件 (2)



(2) v, a_i は (1) と同じとし、整数列 $[[a_1, a_2, \dots, a_s]]$ に -1 がなくなるまで操作:

(*) -1 に等しい数を一取り除き, その両隣にあった数に 1 を加える
(例 $[[\underline{-1}, -4]] \rightarrow [[-2]]$)
を (0 回以上) 繰り返したとき, $[[-2]]$ または $[[-2, \dots, -2]]$ となる。

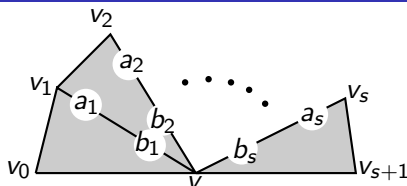
$\implies \mathbf{e}, \mathbf{e}_i \in N (i \in \mathbf{Z})$ を

$$\mathbf{e}_{i-1} + a_{[i]}\mathbf{e}_i + b_{[i]}\mathbf{e} + \mathbf{e}_{i+1} = 0 \quad ([i] \equiv i \pmod{s}, 1 \leq [i] \leq s)$$

を満たすように定めたとき、

$M = \text{Hom}(N, \mathbf{Z})$ の元 \mathbf{e}^* で $\langle \mathbf{e}^*, \mathbf{e} \rangle = 0, \langle \mathbf{e}^*, \mathbf{e}_i \rangle > 0 (\forall i \in \mathbf{Z})$ となるものが定数倍を除いて唯一存在する。 ($\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \rightarrow \mathbf{Z}$)

条件 (3)



(3) v は Δ の境界上の点で v に集まる边上の整数を上図の通りとしたとき、整数列 $[a_1, a_2, \dots, a_s]$ に操作

(**) -1 に等しい数を一つ取り除き、その両隣にあった数に 1 を加える。
ただし、取り除く数が左 (resp. 右) 端のときは右 (resp. 左) 隣の数にだけ 1 を加える。

(例 $[-3, -2, \underline{-1}, -4] \rightarrow [-3, -1, -3]$, $[\underline{-1}, -3, -4] \rightarrow [-2, -4]$)
を (0 回以上) 繰り返したとき、 $[0]$ となる。

$\iff e, e_0, e_1, \dots, e_{s+1} \in N$ を $e_{i-1} + a_i e_i + b_i e + e_{i+1} = 0$ ($1 \leq i \leq s$)
を満たすように定めたとき、

$\langle e^*, e \rangle = \langle e^*, e_0 \rangle = \langle e^*, e_{s+1} \rangle = 0$, $\langle e^*, e_i \rangle > 0$ ($1 \leq i \leq s$)

となる M の元 e^* が存在する。

扇の構成

条件 (2) を満たす Δ の頂点の集合を V_∞ とする。

$\exists f : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta : f^{-1}(\Delta \setminus |V_\infty|)$ への制限が普遍被覆となる被覆

$\tilde{\Delta}$ の三角形 $\overline{v_1 v_2 v_3}$ を一つ選ぶ。また $\{e_1, e_2, e_3\}$ を N の基底とし、 $h(v_i) = e_i$ ($i = 1, 2, 3$) とする。 $\overline{v_2 v_3 v_4}$ を $\overline{v_1 v_2 v_3}$ と辺 $\overline{v_2 v_3}$ で接する三角形とするととき、

$$h(v_1) + a_2 h(v_2) + a_3 h(v_3) + h(v_4) = 0$$

により、 $h(v_4)$ を定める。ここで a_2, a_3 は辺 $f(\overline{v_2 v_3})$ 上の $f(v_2), f(v_3)$ 側に付加された整数である。この操作を繰り返して写像

$$h : \tilde{\Delta}^0 (= \{\tilde{\Delta} \text{の頂点}\}) \rightarrow N$$

が定義でき、

$\Sigma(\Delta) := \{\text{faces of } \mathbf{R}_{\geq 0} h(w_1) + \mathbf{R}_{\geq 0} h(w_2) + \mathbf{R}_{\geq 0} h(w_3) \mid \overline{w_1 w_2 w_3} \text{は} \tilde{\Delta} \text{の三角形}\}$

は非特異錐の集合となる。

扇の構成の続き

条件 (1) を満たす Δ の頂点の集合を V_{in} とする。

命題 1

V_{in} に属す各頂点 v が次の (S) を満たせば、 $\Sigma(\Delta)$ は扇となり、 $|\Sigma(\Delta)|$ は凸である。

(S) v に集まる辺の本数 s は偶数であり、 a_1, \dots, a_s をその辺上の v の反対側に付加された整数とすると、 $a_i = a_{i+s/2}$ ($1 \leq i \leq s/2$) となる。
($\implies 0, \mathbf{e}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+s/2}$ が同一平面上にある。)

命題 2

命題 1 の条件に加えて次の (P) を満たせば、 $|\Sigma(\Delta)|$ は強凸錐となる。

(P) Δ の各辺上の二つの整数の和は -2 以下であり、 -2 の辺を取り除いたとき、多角形分割になる。

Δ から得られる複素多様体と解析的部分集合

Δ は命題 1, 2 の条件を満たすとする。

$Y : \Sigma(\Delta)$ に対応するトーリック多様体

$$\tilde{U} := \text{Int}(\text{ord}^{-1}(|\Sigma(\Delta)|)) \quad (\text{ord} = -\log || : T_N = N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}^{\times} \rightarrow N_{\mathbf{R}})$$

$$\tilde{X} := (Y \setminus T_N) \cap \tilde{U}$$

$$\exists \rho : \text{Gal}(\tilde{\Delta}/\Delta) \rightarrow \text{GL}(N)$$

$$(h(\gamma v) = \rho(\gamma)h(v) \text{ for } \gamma \in \text{Gal}(\tilde{\Delta}/\Delta), v \in \tilde{\Delta}^0)$$

$\Gamma := \text{Im}(\rho)$ は \tilde{U} に固有不連続に作用する。

$U := \tilde{U}/\Gamma$: 複素多様体 $\supset X := \tilde{X}/\Gamma$ 解析的部分集合

$\implies \Delta$ は X の双対グラフである (X の特異点は正規交差のみ)。

Δ の頂点 v に対応する X の既約成分を $X(v)$ とする。

即ち、 $X(v) = [\tilde{U} \rightarrow U](\text{orb}(\mathbf{R}_{\geq 0}h(\tilde{v}))) \cap \tilde{U}$ である。

($\tilde{v} : f(\tilde{v}) = v$ となる $\tilde{\Delta}$ の頂点)

$v \in V_{\text{in}}$ ならば $X(v)$ はコンパクトトーリック曲面である。

$v \in V_{\infty}$ ならば $X(v)$ は開円板上の楕円曲面であり、唯一の特異ファイバーは有理曲線の輪である。

$v \in V_{\text{bd}}$ ならば $X(v)$ は開円板上の線織面である。
(V_{bd} は条件 (3) を満たす Δ の頂点の集合)

$v_1, \dots, v_s \in V_{\text{bd}}$ で $\overline{v_1 v_2}, \dots, \overline{v_{s-1} v_s}, \overline{v_s v_1}$ が Δ の境界上の辺であるとき、 $X(v_1) \cup \dots \cup X(v_s)$ から開円板への正則写像があり、その一般ファイバーは s 個の有理曲線の輪である。

$\tilde{Z} := \bigcup_{\sigma \in \Sigma'} \text{orb}(\sigma) \subset \tilde{U}$ ($\Sigma' := \{\sigma \in \Sigma(\Delta) \mid \sigma \notin \partial|\Sigma(\Delta)|\}$),

$Z := \tilde{Z}/\Gamma$ はコンパクトかつ連結である。

$V_\infty = V_{\text{bd}} = \emptyset$ のとき、 $Z = X$ である。

定理 3

Z のある開近傍 U' から解析空間への固有正則写像で以下の条件を満たすものが存在する。

- (I) $U' \setminus X$ への制限は双正則
- (II) $X(v)$ ($v \in V_\infty$) への制限は楕円曲面のファイブレーションを与える
- (III) $X(v)$ ($v \in V_{\text{bd}}$) への制限は線織面のファイブレーションを与える

定理 3 の証明に必要な定理

Theorem ([R.C.Gunning and H. Rossi, Analytic Functions of Several Variables, VII, D9]) Let (X, \mathcal{O}_X) be an irreducible holomorphically convex analytic space. Let \tilde{X} be the quotient space of X under the equivalence relation $\equiv (\text{ mod } \mathcal{O}_X)$. Let $\pi : X \rightarrow \tilde{X}$ be the canonical projection. \tilde{X} can be given the structure of a Stein analytic space so that π is holomorphic and $\pi^* : \mathcal{O}_{\tilde{X}} \rightarrow \mathcal{O}_X$ is an isomorphism.

\mathcal{O}_X は X 上の正則関数の環である。

解析空間 X が holomorphically convex であるとは、任意のコンパクト集合 K に対して

$$\{z \in X \mid |f(z)| \leq \|f\|_K \text{ for all } f \in \mathcal{O}_X\} \quad (\|f\|_K = \sup\{|f(z)| \mid z \in K\})$$

もコンパクトになることである。

定理 3 の証明の概略

M の元 x の指標 $e^x : T_N \rightarrow \mathbf{C}^\times$ は Y 上の有理関数とみなせる。
 y を $\sigma := \mathbf{R}_{\geq 0}y \in \Sigma(\Delta)$ となる N の原始元とすると e^x は $\text{orb}(\sigma)$ に沿って $\langle x, y \rangle$ 位の 0 を持つ。

したがって、 $C^* \cap M$ の元 x に対する指標 e^x は Y 上の正則関数となる。
($C^* = \{x \in M_{\mathbf{R}} \mid \langle x, y \rangle \geq 0 \text{ for } y \in |\Sigma(\Delta)|\}$)

命題 4

$\sum_{x \in C^* \cap M} |e^x|$ は \tilde{U} 上で収束する。

$C^* \cap M$ の有限個の元 x_1, x_2, \dots, x_l と Z のある開近傍 U' で、
 $\{z \in U' \mid \mathbf{f}^{x_i}(z) = 0 \text{ for } 1 \leq i \leq l\} = Z$ となるものが存在する。

($\mathbf{f}^{x_i} : \sum_{x \in x_i \Gamma} e^x = \mathbf{f}^{x_i} \circ [U \rightarrow U]$ となる U 上の正則関数)

$\implies U'$ の任意のコンパクト集合 K に対して

$$\{z \in U' \mid |\mathbf{f}^{x_i}(z)| \leq \|\mathbf{f}^{x_i}\|_K \text{ for } 1 \leq i \leq l\}$$

がコンパクトとなる。

定理 3 の証明の概略の続き

$\sum_{x \in C^* \cap M} e^x \bar{e}^x$ から導かれる U 上の C^∞ 関数は多重劣調和関数であり、 $U \setminus X$ 上では強多重劣調和である。 \implies (I)

$v : \tilde{\Delta}$ の頂点で $f(v) \in V_\infty \cup V_{bd}$

$\implies \exists v^* \in \partial C^* \cap M \setminus \{0\}$ s.t. $\langle v^*, h(v) \rangle = 0$ (\because 条件 (2) と (3))

$\implies f^{v^*}$ は $X(f(v))$ のファイブレーションを与える。 \implies (II), (III)

($\because e^{v^*}$ は $\overline{\text{orb}(\mathbf{R}_{\geq 0} h(v))}$ のファイブレーションを与える。

$$e^x|_{X(f(v))} \equiv 0 \text{ for } \forall x \in v^* \Gamma \setminus \{v^*\}$$

$(z_1, z_2, z_3) : T_N$ の大域座標 (M の基底 $\{x_1, x_2, x_3\}$ に対して $z_i = e^{x_i}$)

\implies

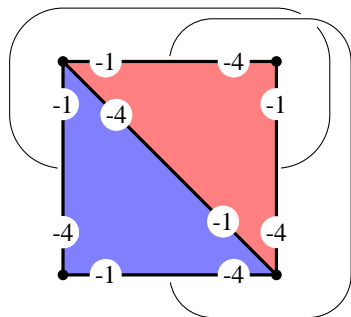
$$\omega := \frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2}{z_2} \wedge \frac{dz_3}{z_3}$$

は \tilde{X} で 1 位の極を持ち、 $g \in \text{GL}(N)$ に対して $g^* \omega = |g| \omega$ である。

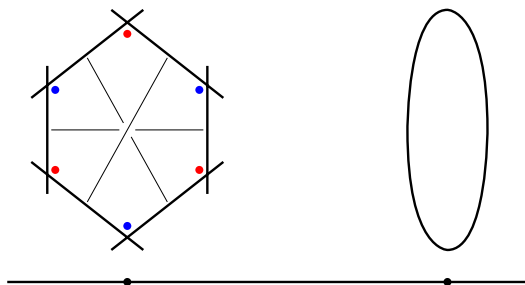
$\implies X$ を U 内で contract して得られる特異点是对数的標準特異点である。

例 1

下左図の Δ は頂点が一つで条件 (2) を満たしている。
 X の正規化は開円板上の楕円曲面であり、唯一の特異ファイバーは 6 本の有理曲線の輪である。

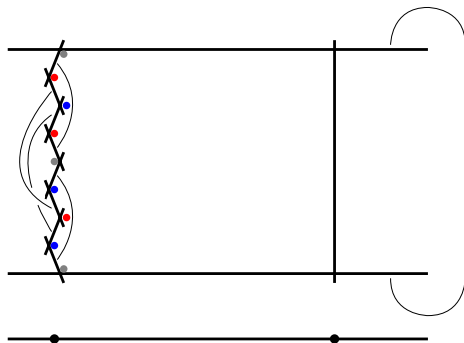
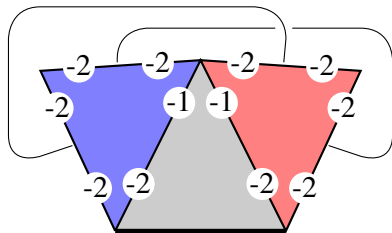


$[-1, -4, -1, -4, -1, -4]$



例 2

下左図の Δ は頂点が一つで条件 (3) を満たしている。
 X の正規化は開円板上の線織面である。



$[-1, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -1]$

Siegel 上半空間の商空間のコンパクト化との関係

Δ が境界を持たず、すべての整数が -2 のとき、 Δ のすべての頂点は V_∞ に属し、命題 1, 2 の条件は満たされる。

このとき $\Gamma(\subset GL(3, \mathbf{Z}))$ は 2 次の Siegel modular 群の部分群とみなせる。

$GL(2, \mathbf{Z})$ は $A: X \mapsto AX^tA$ により

$C = \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix} \mid xy - z^2 > 0, x > 0 \right\}$ に作用する。

濃い灰色の部分が基本領域。

