双曲空間上の垂心単体

「双曲平面上の幾何学」第 5 章の記号を使う。$n \geq 3$ とする。$l_0, l_1, \ldots, l_n$ を一次独立な V の元で $l_i^2 \leq 0$ を満たすとし, 単体 $[l_0][l_1]\cdots[l_n]$ を考える。$l_0, l_1, \ldots, l_n$ が以下の定理の条件を満たすとき, $[l_0][l_1]\cdots[l_n]$ を**垂心単体**と呼ぶ。

定理 1. 以下の条件 (i), (ii), (iii), (iv) は同値である。

(i) すべての $0 \leq i < j < k < m \leq n$ に対して

$$(l_i \cdot l_j)(l_k \cdot l_m) = (l_i \cdot l_k)(l_j \cdot l_m) = (l_i \cdot l_m)(l_j \cdot l_k)$$

が成り立つ 。

(ii) 各辺 $[l_i][l_j]$ に対して $[l_i][l_j]$ に直交し, $[l_i]$, $[l_j]$ 以外の $n-1$ 個のすべての頂点を含む P 超平面が存在する。

(iii) 各頂点から対面への垂線は一つの P 点 (または Γ 上の点) で交わるか一つの P 超平面に直交する。

(iv) $[l_0]$ から $n-1$ 次元面 $[l_1][l_2]\cdots[l_n]$ への垂線の足を O とするとき, $[l_1][l_2]\cdots[l_n]$ は (iii) の条件を満たし, その交点が O である。即ち, $1 \leq i \leq n$ に対して P 直線 $O[l_i]$ は $[l_0]$, $[l_i]$ を含まない $n-2$ 次元面に直交する。

P 直線 L が P 超平面 α に直交するとは L を含むすべての P 超平面が α に直交することであり, V の疑内積 $\cdot$ は非退化であるから, 次が成り立つ。

補題 2. l, m を相異なる V の元で $l^2 \leq 0$, $m^2 \leq 0$ を満たすとする。P 超平面 α が P 直線 $[l][m]$ に直交するための必要十分条件は $\alpha = [cl + dm]$ となる実数 c, d が存在することである。

定理 1 **の証明** (ii) $\Longrightarrow$ (i) $0 \leq i < j \leq n$ に対して上の補題より $[l_i][l_j]$ に直交する P 超平面は実数 c, d により $[cl_i + dl_j]$ である。ここで $[l_i]$, $[l_j]$ は P 超平面ではないから, $c \neq 0$, $d \neq 0$ である。この P 超平面が頂点 $[l_k]$ を含めば, $cl_i \cdot l_k + dl_j \cdot l_k = 0$ であるから, i, j と異なるすべての k, m に対して

$$(l_j \cdot l_k)(l_i \cdot l_m) - (l_i \cdot l_k)(l_j \cdot l_m) = 0$$

が成り立つ。

(i) $\Longrightarrow$ (iii) すべての $0 \leq i < j \leq n$ に対して仮定と上の補題より, $[(l_j \cdot l_k)l_i - (l_i \cdot l_k)l_j]$ は $[l_i][l_j]$ に直交し, $[l_i]$, $[l_j]$ 以外の $n-1$ 個のすべての頂点を含む P 超平面である。0 か

ら n までのある相異なる整数 i, j, k に対して

$$(l_j \cdot l_k)l_i^2 - (l_i \cdot l_j)(l_i \cdot l_k) = 0$$

が成り立つとする。$l_i \cdot ((l_j \cdot l_k)l_i - (l_i \cdot l_k)l_j) = 0$ であるから, $[(l_j \cdot l_k)l_i - (l_i \cdot l_k)l_j]$ は $[l_j]$ を含まない $n-1$ 次元面である。即ち, $[l_j]$ から対面への垂線の足は $[l_i]$ である。また, このとき $[l_i]$, $[l_j]$, $[l_k]$ と異なる任意の頂点 $[l_m]$ に対して

$$(l_j \cdot l_m)l_i^2 - (l_i \cdot l_j)(l_i \cdot l_m) = \frac{l_j \cdot l_m}{l_j \cdot l_k}\left((l_j \cdot l_k)l_i^2 - (l_i \cdot l_j)(l_i \cdot l_k)\right) = 0$$

であるから, $[l_i]$ 以外の任意の頂点から対面への垂線の足も $[l_i]$ である。したがって, すべての頂点から対面への垂線は $[l_i]$ を通る。以下, 0 から n までのすべての相異なる整数 i, j, k に対して

$$(l_j \cdot l_k)l_i^2 - (l_i \cdot l_j)(l_i \cdot l_k) \neq 0$$

であるとする。

$$\begin{aligned} h \;=\; & \frac{l_0}{(l_1 \cdot l_2)l_0^2 - (l_0 \cdot l_1)(l_0 \cdot l_2)} + \frac{l_1}{(l_2 \cdot l_0)l_1^2 - (l_1 \cdot l_2)(l_1 \cdot l_0)} + \frac{l_2}{(l_0 \cdot l_1)l_2^2 - (l_2 \cdot l_0)(l_2 \cdot l_1)} \\ & + \sum_{i=3}^{n} \frac{l_0 \cdot l_i}{l_0 \cdot l_2} \frac{l_i}{(l_0 \cdot l_1)l_i^2 - (l_i \cdot l_0)(l_i \cdot l_1)} \end{aligned}$$

とすれば, すべての $\{i, j, k\} \subset \{0, 1, \ldots, n\}$ に対して $((l_j \cdot l_k)l_i - (l_i \cdot l_k)l_j) \cdot h = 0$ である。$[l_k]$ から対面への垂線はすべての $\{i, j\} \subset \{0, 1, \ldots, n\} \setminus \{k\}$ に対する P 超平面 $[(l_j \cdot l_k)l_i - (l_i \cdot l_k)l_j]$ の交わりであるから, $[h]$ を通るか $[h]$ に直交する。

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) O を各頂点から対面への垂線の交わりの P 点, Γ 上の点またはに直交する P 超平面とする。各辺 $[l_i][l_j]$ に対して $[l_i]$, $[l_j]$ 以外のすべての頂点を通り, O も通るか直交する P 超平面は $[l_i][l_j]$ を含む $n-1$ 個の $n-1$ 次元面に直交するから, $[l_i][l_j]$ にも直交する。

(i), (iii) $\Longrightarrow$ (iv) 1 から n までのある相異なる i, j に対して $(l_0 \cdot l_i)l_j^2 - (l_j \cdot l_0)(l_j \cdot l_i) = 0$ ならば, (i) $\Rightarrow$ (iii) でみたように $O = [l_j]$ であり, 0, j と異なる任意の i に対して P 直線 $O[l_i]$ は $[l_0]$, $[l_i]$ を含まない $n-2$ 次元面に直交する。次に, $(l_1 \cdot l_2)l_0^2 - (l_0 \cdot l_1)(l_0 \cdot l_2) = 0$ の場合を考える。任意の $1 \leq i \leq n$ に対して P 平面 $O[l_0][l_i]$ は $[l_0]$ を含まない P 超平面と $[l_i]$ を含まない P 超平面の両方に直交するから, $[l_0]$, $[l_i]$ を含まない $n-2$ 次元面に直交する。したがって, P 直線 $[l_i]O$ もこの $n-2$ 次元面に直交する。以下, すべての相異なる i, j, k に対して $(l_i \cdot l_j)l_k^2 - (l_k \cdot l_i)(l_k \cdot l_j) \neq 0$ とする。上の h に対して

$$O = [h - \frac{l_0}{(l_1 \cdot l_2)l_0^2 - (l_0 \cdot l_1)(l_0 \cdot l_2)}]$$

である。

(iv) $\Longrightarrow$ (i) 仮定より, $1 \leq i < j < k < m \leq n$ に対して (i) の等式が成り立つ。また, 仮定より, $[(l_j \cdot l_k)l_i - (l_i \cdot l_k)l_j]$ は $[l_0]$ を含むから, $(l_j \cdot l_k)(l_i \cdot l_0) = (l_i \cdot l_k)(l_j \cdot l_0)$ が成り立つ。 ■

すべての $0 \leq i \leq n$ に対して $l_i^2 = 0$ のとき, 即ち, すべての頂点 $[l_i]$ が Γ 上の点のとき, $[l_0][l_1]\cdots[l_n]$ を**極限単体**と呼ぶ。極限単体 $[l_0][l_1]\cdots[l_n]$ が垂心単体でもあれば, (ii) の P 超平面による鏡映は二つの頂点 $[l_i]$, $[l_j]$ を入れ替え, 他の頂点を動かさない。したがって, 対称群 S_{n+1} が作用する。