双曲平面上ではシムソンの定理は成り立たないが

ユークリッド平面上のシムソンの定理「三角形の外接円上の点から三辺への垂線の足は一直線上にある。」は双曲平面上ではそのままでは成り立たない。そこで, 双曲平面上の相異なる三直線に対してその点からの三直線への垂線の足が一直線上にある点の軌跡を考える。一般の位置にある三直線に対しては軌跡は三次曲線となる (図 1, 2 参照, 三直線は黒, 点の軌跡は青) が, 特別な位置にある三直線に対しては二次曲線または直線となる。一組の辺だけが極限平行のときは二次曲線となり (図 3 参照), 二組の辺が極限平行のときは直線となる (図 4, 5 参照)。また, 直線 D に関して直線 A, B, C と対称な直線を A', B', C' としたとき, A' は B, C と直交し, B' は C, A と直交し, C' は A, B と直交していれば D が軌跡となる (図 6 参照)。

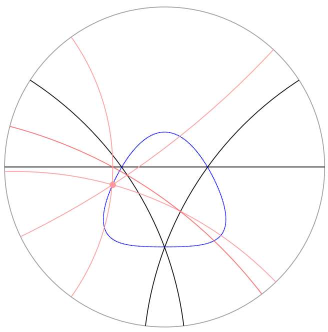
図 1

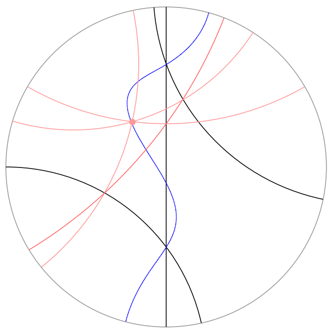
図 2

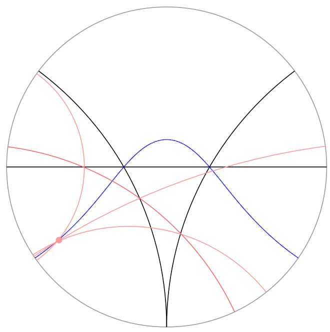
図 3

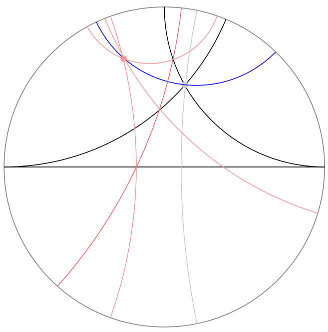
図 4

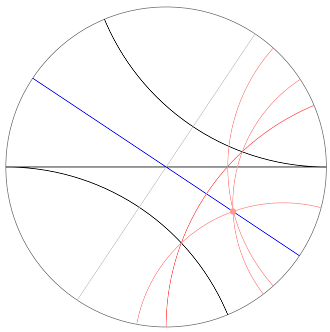
図 5

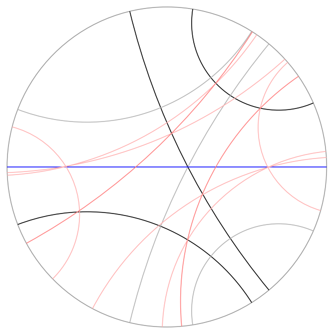
図 6

双曲平面上の n 次曲線とは：ポアンカレの円盤モデル Δ(xy-平面の原点を中心とし, 半径が 1 の円の内部) における直線は Δ の境界に直交する円または直線の Δ に含まれる部分であり, x, y, x^2+y^2+1 の一次結合の零点となる。そこで Δ における n 次曲線は x, y, x^2+y^2+1 の斉次 n 次多項式の零点と定義する (詳しくは [1] を参照)。

1　問題の設定

以下, ポアンカレの円盤モデルで考える。即ち,

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}, \quad \Gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$$

とするとき, 双曲平面上の点とは Δ 内の点であり, 直線とは Γ に直交する円または直線の Δ に含まれる部分である。[1] に書いたように双曲平面上の点と直線を区別すると記述が煩雑になるので区別せずに Γ 上の点も含めて**対象**と呼ぶことにする。

記号: A, B を相異なる対象とするとき, 以下の記号を用いる。

AB : A と B から決まる対象

$A|B := (AB)B$ （A が点で, B が直線のときは A から B への垂線の足)

$A \perp B$: A, B が直線のときは直交し, 一方が点で, もう一方が直線のときは点が直線上にあることを意味する。A, B が点ならば, $A \not\perp B$ であるが, $A=B$ が Γ 上の点ならば $A \perp B$ である。

$AB=BA$ は A, B が相異なる点のときは, A, B を通る直線であり, A が点で B が直線のときは A から B への垂線であり, A, B が相異なる直線のときは, 交わればその交点であり, 平行ならば A, B の両方に直交する直線である。また, A が Γ 上の点で B が A を通る直線のときは $AB=A$ である。なお, $A=B$ のときは AB は定義されない。

$A|B$ は A が点で B が直線のときは A から B への垂線の足であり, A, B が平行な直線のときは A, B の両方に直交する直線と B の交点であり, A, B が C で交わる直線のときは C で B に直交する直線であり, A が直線で B が点のときは B から A への垂線に B を通って直交する直線であり, A, B が相異なる点のときは B を通って AB に直交する直線である (図 7 参照)。なお, B が Γ 上の点のときは, $A \neq B$ かつ $A \perp B$ (A が B を通る直線) ならば $AB=B$ であるから, $A|B$ は定義されないが, $A \not\perp B$ ならば $A|B=B$ である。

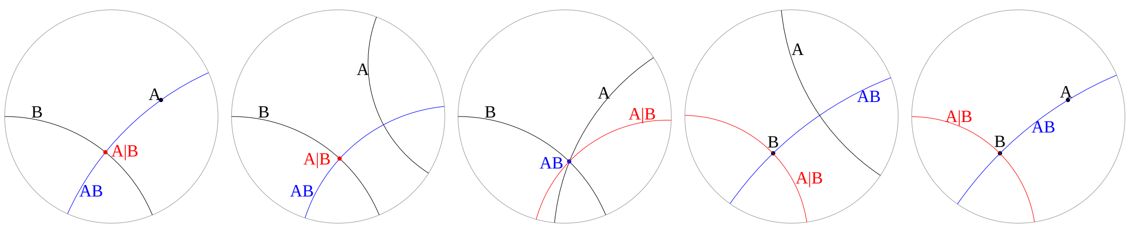

図 7

定義 対象 A, B, C の中に同じものがあるか $AB=BC=CA$ のとき, A, B, C は**従属**しているという。

双曲平面上の対象の集合を $\mathbb{O}$ で表す。A, B, C を相異なる対象とするとき,

$$S(A,B,C) = \{M \in \mathbb{O} \mid M|A, M|B, M|C \text{ のいずれかが定義されないか従属}\}$$

とする。A, B, C が直線で M が $S(A,B,C)$ に属する点のときは M から A, B, C への垂線の足が一直線上にある。以下で $S(A,B,C)$ がどんな集合か考察する。

$$V = \{sx + ty + u(x^2+y^2+1) \mid s,t,u \in \mathbf{R}\}$$

とし, $V \setminus \{0\}$ の元 l に対して [1] の 19 ページの定義のように $\mathbb{O}$ の元 $[l]$ を決めたとき, 対応 $l \mapsto [l]$ は実射影平面 $(V \setminus \{0\})/\mathbf{R}^\times$ から $\mathbb{O}$ の上への一対一写像を与える。また, $V \setminus \{0\}$ の元 l, m に対して [1] の 18, 21 ページのように疑内積 $l \cdot m$ と疑外積 $l * m$ を定義すれば, $[l][m]$ が定義されない, 即ち, $[l]=[m]$ であるための必要十分条件は $l*m=0$ であり, $l*m \neq 0$ のときは $[l][m] = [l*m]$ である。また, $[l]\perp[m]$ であるための必要十分条件は $l \cdot m = 0$ となることである。疑内積と疑外積 の性質 ([1] の 21 ページ参照) より, 以下の定理 1, 2 と系 3, 4, 5. 6 が成り 立つことがわかる。

定理 1. A, B が相異なる対象ならば $(AB)\perp A$ である。

定理 2. A, B, C が相異なる対象で, $A\perp C$, $B\perp C$ ならば $C=AB$ である。

系 3. A, B が相異なる対象で $A\perp B$ であり, B が Γ 上の点でないならば $A|B = A$ である。

系 4. A, B, C が相異なる対象で $AB \neq C$ ならば $((AB)C)B = AB$ であり, さらに B が Γ 上の点でないならば $((AB)B)B = AB$ である。

系 5. A, B, C が相異なる対象ならば $(AB)(AC) = A$ である。

系 6. A, B, C が相異なる対象で $AB\perp C$ ならば $AC = AB$ である。

定理 1, 2 より, 対象 A, B, C が従属するための必要十分条件は $D\perp A$, $D\perp B$, $D\perp C$ を満たす対象 D が存在することである。したがって, A, B, C が相異なる点のときは一直線上にあることを意味し, 相異なる三直線のときは一点で交わるか三直線のいずれにも直交する直線が存在することを意味する。それ以外の場合は点はその直線上にあり, 直線はその直線に直交するような直線が存在することを意味する。

$a,b,c \in V \setminus \{0\}$ に対して

$$W(a,b,c) = \{m \in V \mid (m*a)*a, (m*b)*b, (m*c)*c \text{ が線形従属 }\}$$

とする。$[m]|[a]$ が定義されないための必要十分条件は $(m*a)*a = 0$ であり, 定義されるときは $[m]|[a] = [(m*a)*a]$ であるから, $[a]$, $[b]$, $[c]$ が異なるとき

$$m \in W(a,b,c) \setminus \{0\} \iff [m] \in S([a],[b],[c])$$

である。$m = sx + ty + u(x^2+y^2+1)$ とすれば、$(m*a)*a$ の x, y, x^2+y^2+1 の係数

は s, t, u の斉次一次式であるから, s, t, u の斉次 3 次多項式 $P(s,t,u)$ で

$$W(a,b,c) = \{sx + ty + u(x^2 + y^2 + 1) \mid s,t,u \in \mathbf{R},\ P(s,t,u) = 0\}$$

を満たすものが存在する。

2　特殊な場合

$M \in \mathbb{O}$ に対して

$$O_M = \{L \in \mathbb{O} \mid L \perp M\}$$

とする。$m \in V \setminus \{0\}$ に対して $[m]$ が Γ 上の点であるための必要十分条件は $m \cdot m = 0$ であるから, $M \in O_M$ ならば, M は Γ 上の点である。

補題 7. 極限三角形 (頂点が Γ 上にある三角形) の辺上の点から他の二辺への垂線は直交する。

証明　ABC を極限三角形 (即ち, A, B, C は Γ 上の点) とし, BC 上の点から AB, CA への垂線をそれぞれ D, E とし, α_D, α_E をそれぞれ D, E に関する対称変換とする ([1] の 43 ページ参照)。α_D は B を A に移し, α_E は A を C に移すから, $\alpha_E \circ \alpha_D$ は B を C に移す。したがって, D と E は直交する。 ■

定理 8. A, B, C が相異なる対象で従属していれば, $D = AB = BC = CA$ に対して $O_D \cup \{D\} \subset S(A,B,C)$ である。さらに, D が直線のとき, D と Γ の交点を F, G とすれば $O_F \cup O_G \subset S(A,B,C)$ である。

証明　任意の $E \in O_D$ に対して定理 1, 2 より, $EA = EB = EC = D$ である。したがって, 定理 1 より, $E|A$, $E|B$, $E|C \in O_D$ である。また, 系 4 より, $D|A = D|B = D|C = D$ であるから, 前半が成り立つ。

D と異なる任意の O_F の元 H に対して H と Γ の交点で F と異なる方を I とし, G と I を通る直線を J とすれば, 補題 7 より, 任意の $K \in O_D$ に対して $(H|K) \perp J$ となるから, 後半が成り立つ。 ■

定理 9. A, B, C が相異なる対象で $A = BC$ ならば $O_A \subset S(A,B,C)$ である。

証明　O_A の任意の元 D に対して, 定理 2 より, $D|A = D$ である。また, 定理 2 より, D が B, C と異なれば, $DB = DC = A$ であるから, 定理 1 より, $(D|B) \perp A$, $(D|C) \perp A$ である。 ■

定理 10. A, B, C が相異なる対象で A と B が極限平行な直線ならば $O_{AB} \subset S(A,B,C)$ である。

証明　$E \in O_{AB} \setminus \{A,B\}$ ならば $E|A = E|B = AB$ である。 ■

定理 11. A, B, C が相異なる対象で A が Γ 上の点ならば $O_A \subset S(A,B,C)$ である。

証明　O_A の任意の元 D に対して $D|A$ は定義されない。 ■

$(W(a,b,c)\setminus\{0\})/\mathbf{R}^{\times}$ は三次曲線であるから, A, B, C が相異なる Γ 上の点ならば, 上の定理より $S(A,B,C)=O_A\cup O_B\cup O_C$ である。また, A, B, C が極限三角形の三辺ならば, $S(A,B,C)=O_{AB}\cup O_{BC}\cup O_{CA}$ である。

定理 12. A, B, C が相異なる対象で, A と B, A と C が極限平行であり, B と C が極限平行でないとき, $E=A|(BC)$ とすれば、$O_E\subset S(A,B,C)$ である (図 8 参照, $F\in O_E$)。

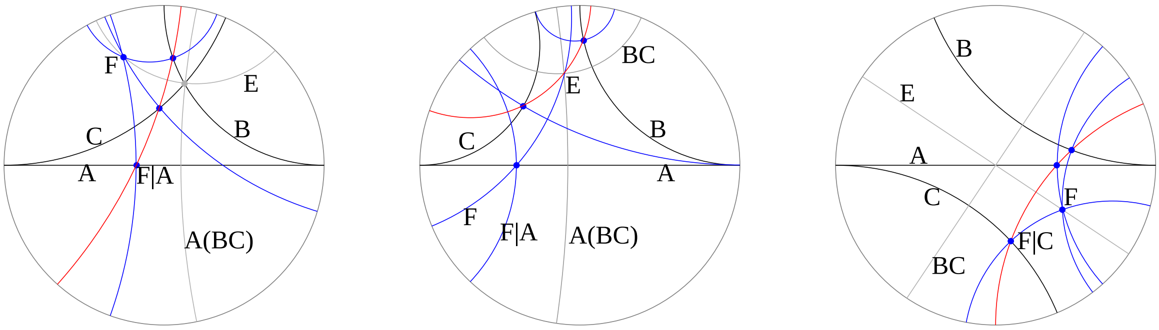

図 8

証明　a,b,c を $A=[a]$, $B=[b]$, $C=[c]$ を満たす V の元とし, $e=(a*(b*c))*(b*c)$ とすれば, $E=[e]$ であるから, $[f]\perp E$ となる $V\setminus\{0\}$ の元 f は $a*(b*c)$ と $b*c$ の一次結合である。仮定より, $AB=[a*b]$, $AC=[a*c]$ は Γ 上の点である。定理 10 より,

$$W_{AB}=(\{l\in V\mid l\cdot(a*b)=0\}\setminus\{0\})/\mathbf{R}^{\times},\quad W_{AC}=(\{l\in V\mid l\cdot(a*c)=0\}\setminus\{0\})/\mathbf{R}^{\times}$$

は $(W(a,b,c)\setminus\{0\})/\mathbf{R}^{\times}$ の相異なる既約成分である。したがって, $W(a,b,c)$ の定義式の 3 次多項式 $P(a,b,c)$ は三つの斉次一次式の積になる。系 4 より, $(BC)|B=((BC)B)B=BC=(BC)|C$ であるから, $b*c\in W(a,b,c)\setminus\{0\}$ である。また、再び系 4 より, $((BC)A)|A=(((BC)A)A)A=(BC)A$, $((BC)A)|B=(BC)B$, $((BC)A)|C=(BC)C$ であるから, $a*(b*c)\in W(a,b,c)\setminus\{0\}$ である。$b*c, a*(b*c)\notin W_{AB}\cup W_{AC}$ であるから, $b*c$ と $a*(b*c)$ の一次結合も $W(a,b,c)$ に属す。 ■

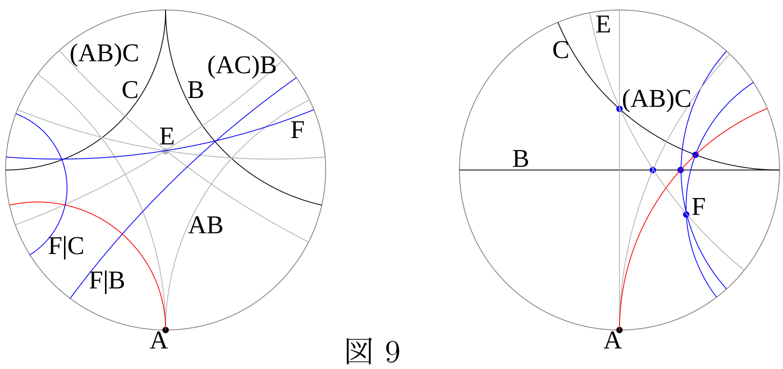

図 9

定理 13. A, B, C が相異なる対象で B と C が極限平行な直線であり, A が BC と異なる Γ 上の点であるとき, $E=((AB)C)((AC)B)$ とすれば, $O_E \subset S(A,B,C)$ である (図 9 参照, $F \in O_E$)。

証明　a,b,c,e を $A=[a]$, $B=[b]$ $C=[c]$, $E=[e]$ を満たす $V\setminus\{0\}$ の元とする。定理 10, 11 より,

$$W_A=(\{l\in V \mid l\cdot a=0\}\setminus\{0\})/\mathbf{R}^\times,\ W_{BC}=(\{l\in V \mid l\cdot(b*c)=0\}\setminus\{0\})/\mathbf{R}^\times$$

は $(W(a,b,c)\setminus\{0\})/\mathbf{R}^\times$ の相異なる既約成分である。$((AB)C)|A=A$, $((AB)C)|B=(AB)B$, $((AB)C)|C=(AB)C$ であるから, $(AB)C\in S(A,B,C)$ である。$(AB)C\notin O_A\cup O_{BC}$ であるから, $(a*b)*c\in W(a,b,c)\setminus(W_A\cup W_{BC})$ である。同様に, $(a*c)*b\in W(a,b,c)\setminus(W_A\cup W_{BC})$ である。定理 12 の証明と同様に $[f]\in O_E$ となる V の元 f は $(a*b)*c$ と $(a*c)*b$ の一次結合であり, $W(a,b,c)$ に属す。■

[1] の定理 2.6 により, $(AB)C$, $(BC)A$, $(CA)B$ は従属しているから, 上の定理において A と BC を通る直線 $(BC)A$ も E を通るか E に直交している。したがって, $(BC)A\in O_E\cap O_A\cap O_{BC}$ であるから, a, b, c を $A=[a]$, $B=[b]$, $C=[c]$ を満たす $V\setminus\{0\}$ の元とすれば, $(W(a,b,c)\setminus 0)/\mathbf{R}^\times$ は一点で交わる三直線である。

問題 1　A, B が Γ 上の相異なる点で C が点または A, B のいずれも通らない直線のとき $S(A,B,C)\setminus(O_A\cup O_B)$ はどんな集合か。

定理 8-13 の中で A, B, C がすべて直線で $S(A,B,C)$ が点を含むものは図 10 の四つの場合だけであり, 点の軌跡は直線となる。以下で, これら以外に $S(A,B,C)$ に含まれる点の軌跡が直線となる場合があるか考える。

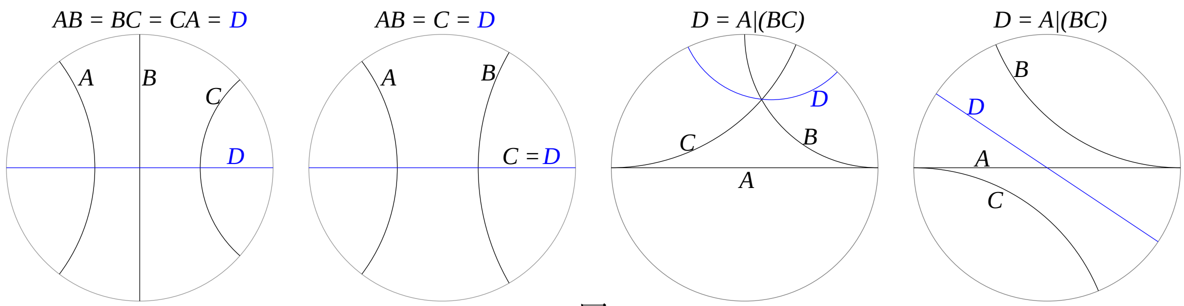

図 10

定理 8, 9, 10, 11 により, 相異なる対象 A , B, C が以下のいずれかを満たせば, $O_D\subset S(A,B,C)$ となる対象 D が存在する。

(i) A, B, C は従属

(ii) $A=BC$, $B=CA$ または $C=AB$

(iii) A, B, C の中の二つが極限平行な直線

(iv) A, B, C のいずれかが Γ 上の点

3　一般の場合

$W(a,b,c)$ を定義する三次多項式が (実数体上) 既約でなければ, 一次式を因子に持つから $O_D \subset S(A,B,C)$ を満たす対象 D が存在する。以下で, A, B, C が相異なる対象で (i)-(iv) のいずれでもないときに, そのような対象 D が存在するか考える。

定理 14. A, B, C が相異なる対象で $O_A \subset S(A,B,C)$ ならば, A は Γ 上の点であるか $A = BC$ である。

証明　A は Γ 上の点でないとする。定理 1, 2 より, $D \in O_A$ に対して $D|A = D$, $D(D|B) = DB$, $D(D|C) = DC$ である。したがって, $D|A$, $D|B$, $D|C$ が従属していれば, D, B, C も従属しているから $BC = A$ である。 ■

定理 15. A, B, C が相異なる対象で $O_{AB} \subset S(A,B,C)$ ならば, A と B は極限平行であるか A, B, C は従属するか $C = AB$ である。

証明　結論が成り立たないとし, $D = C|(AB)$ とすれば, $D \in O_{AB}$ であるが, $D \notin S(A,B,C)$ である。 ■

定理 16. A, B, C が相異なる対象で $(AB)C$ が定義でき, $O_{(AB)C} \subset S(A,B,C)$ ならば, $AC = B$ または $BC = A$ である。

証明　結論が成り立たないとし, D を A, B, C と異なる $O_{(AB)C}$ の元とすれば, $D \notin S(A,B,C)$ である。 ■

定理 17. A, B, C が相異なる対象で $(AB)A$ が定義でき, $O_{(AB)A} \subset S(A,B,C)$ ならば, A は Γ 上の点であるか A と B は極限平行であるか $AC = B$ である。

証明　結論が成り立たないとし, D を $(B|C)((AB)A)$ と異なる $O_{((AB)A)}$ の元とすれば, $D \notin S(A,B,C)$ である。 ■

定理 18. A, B, C が従属しない対象で $A(BC)$, $((AB)B)((AC)C)$ が定義できるならば, $\{A, BC, A(BC), ((AB)B)((AC)C)\} \subset O_D$ を満たす対象 D は存在しない。

証明　$A, BC, A(BC) \in O_D$ を満たす対象 D が存在すると仮定する。$A \perp D$, $BC \perp D$ であるから, 定理 2 より, $D = A(BC)$ である。$D \in O_D$ であるから, D は Γ 上の点である。A, B, C は従属しないから, $A \neq D$, $BC \neq D$ である。したがって, A, BC は D で接する直線である。E を A, BC, E が極限三角形をなす直線とする。補題 7 より, $(AB)B \perp E$, $(AC)C \perp E$ であるから, $((AB)B)((AC)C) = E \notin O_D$ である。 ■

定理 19. A, B, C を相異なる対象とするとき,

$$\{A,\ AB,\ (AB)C,\ ((AB)B)((AC)C)\} \subset S(A,B,C)$$

である。

証明　$A|A$ は定義されないから, $A \in S(A,B,C)$ である。

系 4 より, $((AB)A)A = AB = ((AB)B)B$ であるから, $AB \in S(A,B,C)$ である。

系 4 より, $((AB)C)A = AB$ であるから, $((AB)C)|A = (AB)A$ である。同様に, $((AB)C)|B = (AB)B$ である。また, 系 4 より, $((AB)C)|C = (((AB)C)C)C = (AB)C$ である。したがって, $(AB)C \in S(A,B,C)$ である。

$M = ((AB)B)((AC)C)$, $P = M|A$, $Q = M|B$, $R = M|C$ とおく。系 4 より, $MB = (AB)B$, $MC = (AC)C$ であるから, 再び, 系 4 より, $Q = AB$, $R = AC$ である。したがって, 系 5 より, $PQ = QR = RP = A$ である。即ち, $M \in S(A,B,C)$ である。 ■

定理 19 により, 図 11 の中の 12 点の対象は $S(A,B,C)$ に含まれる。$O_D \subset S(A,B,C)$ となる対象 D が存在するとし, 図 11 の同一直線上にある 2 点の対象を O_D が含めば, (i)-(iv) のいずれかが成り立つ。例えば, $\{A, AB\} \subset O_D$ ならば, $D = (AB)A$ であり, 定理 17 により, (ii), (iii), (iv) のいずれかが成り立つ。

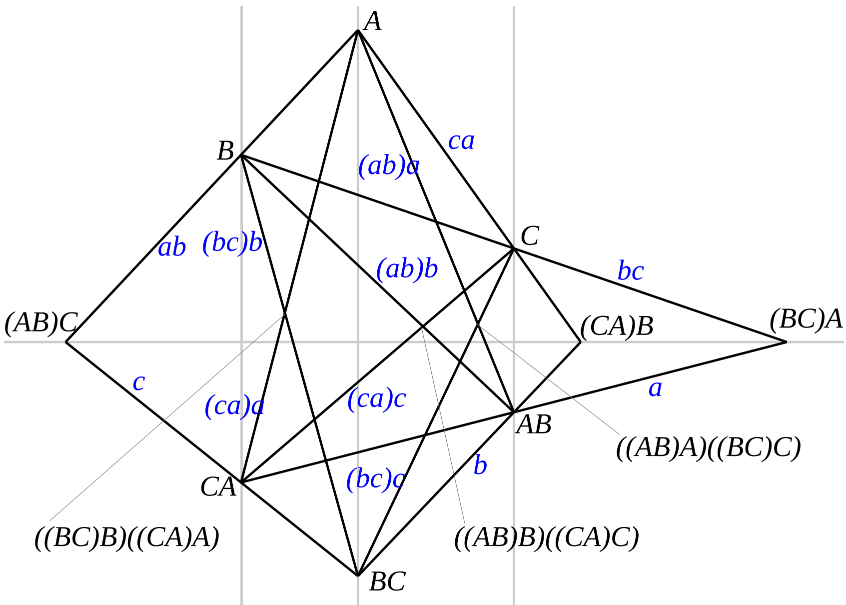

図 11

定理 20. A, B, C が相異なる対象で (i)-(iv) のいずれでもなく図 11 の 12 点の対象がすべて異なれば, $O_D \cup O_E \cup O_F = S(A,B,C)$ となる対象 D, E, F は存在しない。

証明　定理 15 より, $A \in O_D$, $B \in O_E$, $C \in O_F$ と仮定してよい。定理 14, 15, 17 より, 図 11 の中の A を除く 11 点の対象で O_D 上にありうるのは BC, $(BC)A$, $((AB)B)((CA)C)$ の三つだけであるが, 定理 18 より, 三つすべては O_D 上にないから O_D 上には 12 点の対象の中の多くとも 3 つしか含まれない。O_E, O_F に対しても同様なので定理 19より, $O_D \cup O_E \cup O_F \not\subset S(A,B,C)$ である。 ■

定理 21. 定理 20 と同じ仮定の下で $O_D \subset S(A,B,C)$ となる対象 D が存在すれば,

$$\{(AB)C, (BC)A, (CA)B, ((AB)B)((CA)C), ((AB)A)((BC)C), ((BC)B)((CA)A)\} \subset O_D$$

である。

証明 a, b, c を $A = [a]$, $B = [b]$, $C = [c]$ を満たす V の元とすれば, 仮定と定理 20 より, $(W(a,b,c) \setminus \{0\})/\mathbf{R}^\times$ は直線と (二直線ではない) 二次曲線の和である。したがって, $S(A,B,C) \setminus O_D$ は図 11 の同一直線上にある 3 点の対象を含まないから, $A, B, C, BC, CA, AB \notin O_D$ を示せばよい。

$A \in O_D$ と仮定すると定理 15, 16, 17 より, O_D は 図 11 の同一直線上の BC, CA, $(AB)C$ の 3 点の対象を含まない。すると $S(A,B,C) \setminus O_D$ はそれらの 3 点の対象を含むことになってしまうから, $A \notin O_D$ である。同様に, $B, C, BC, CA, AB \notin O_D$ である。 ■

[1] の定理 2.6 より, $\{(AB)C,\ (BC)A,\ (CA)B\} \subset O_D$ となる対象 D が存在する。$(W(a,b,c) \setminus \{0\})/\mathbf{R}^\times$ は三次曲線であるから,

$$((AB)B)((CA)C), \quad ((AB)A)((BC)C), \quad ((BC)B)((CA)A)$$

のいずれかが O_D に含まれれば, $O_D \subset S(A,B,C)$ である。さらに, このとき上の定理より, 他の二つも O_D に含まれる。

D を Γ 上の点ではない対象とし, α_D を D に関する対称変換とする ([1] の 43 ページを参照せよ)。D が点のときは, D と異なる任意の点 A に対して線分 $\overline{A\alpha_D(A)}$ の中点が D であり, D が直線のときは, D 上にない任意の点 A に対して線分 $\overline{A\alpha_D(A)}$ の垂直二等分線が D である。

定義 $X' = \alpha_D(X)$ のとき, X と X' は D に関して**対称**であるという。

X, Y を相異なる対象とし, X', Y' を D に関してそれぞれ X, Y と対称な対象とすれば, $X'Y'$ も D に関して XY と対称である。また, 相異なる対象 A, B が対象 D に関して対称ならば, A, B, D は従属するから $AB \in O_D$ である。

定理 22. A, B, C を相異なる対象で (i)-(ii) のどちらでもないとし, D を $\{(AB)C$, $(BC)A$, $(CA)B\} \subset O_D$ となる対象とする。

$$\{((AB)B)((CA)C), \quad ((AB)A)((BC)C), \quad ((BC)B)((CA)A)\} \subset O_D$$

となるための必要十分条件は D が Γ 上の点ではなく, D に関して BC, CA, AB がそれぞれ A, B, C と対称となることである (図 12 参照)。

証明 (十分条件) $(AB)A$ と $C(BC)$ も D に関して対称であるから, $((AB)A)((BC)C) \in O_D$ である。$((AB)B)((CA)C)$, $((BC)B)((CA)A)\}$ も同様である。

(必要条件) 先ず, D が Γ 上の点であると仮定する。h を $O_{[h]}$ が図 11 の 12 点の対象のいずれも含まない $V \setminus \{0\}$ の元とし, $H = \{u \in V \mid u \cdot h = 1\}$ とする。$p : H \to \mathbb{O}$ を u を $[u]$ に移す写像の H への制限とする。図 11 の 12 点はすべて $p(H)$ に含まれる。a, a', b, b', d をそれぞれ $p(a) = A$, $p(a') = BC$, $p(b) = B$, $p(b') = CA$, $p(d) = D$ となる H の元とする。$A \perp A(BC)$, $BC \perp A(BC)$, $D \perp A(BC)$ であるから, a, a', d は一直線上にある。同様に, b, b', d も一直線上にあるから, d は aa' (a と a' を通る H 上の直線) と bb' の交点である。$L = \{l \in H \mid l \cdot d = 0\}$ とすれば $d \in L$ である。e を ab と $a'b'$ の交点とすれば, $p(e) = (AB)C$ であるから, $e \in L$ である。f を ab' と $a'b$ の交点とすれば, $p(f) = ((CA)A)((BC)B)$ であるから, $f \in L$ である。ところが, a, a', b, b' はすべて異なり, どの 3 点を一直線上にないから, d, e, f は一直線上になく矛盾である。したがって, D は Γ 上の点ではない。

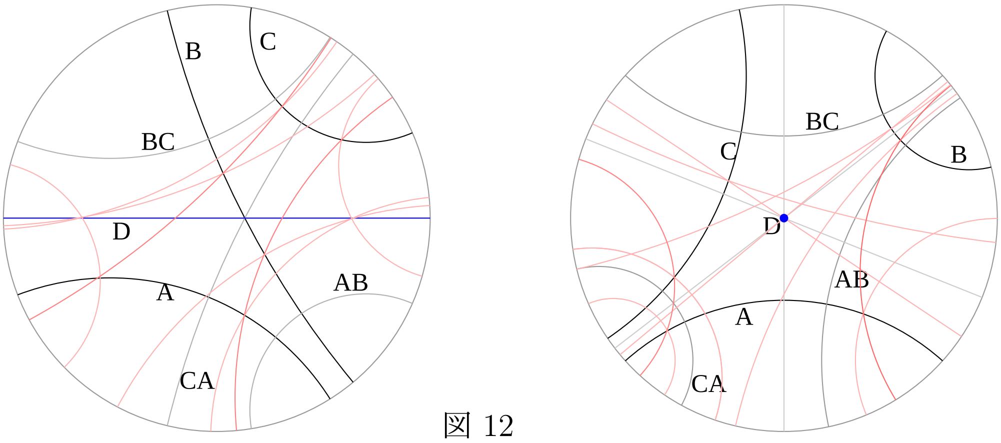

図 12

次に, D が直線の場合を考える。必要ならば, 対称変換を繰り返して $D = [y]$ であり, 図 11 の 12 点の対象の中に $O_{[x^2+y^2+1]}$ に含まれるものはないとしてよい。

$$H = \{sx + ty + (x^2 + y^2 + 1) \in V \mid s, t \in \mathbf{R}\} \supset L = \{sx + (x^2 + y^2 + 1) \mid s \in \mathbf{R}\}$$

とし, $p : H \to \mathbb{O}$ を u を $[u]$ に移す写像の H への制限とする。上の仮定より, 図 11 の 12 点はすべて $p(H)$ に含まれる。$u, v \in H$ に対し $p(u)$ と $p(v)$ が D に関して対称であるための必要十分条件は u と v が L に関して対称 (即ち, $u = sx + ty + (x^2 + y^2 + 1)$ ならば $v = sx - ty + (x^2 + y^2 + 1)$) となることである。また, $u, v, w \in H$ に対して $p(u)$, $p(v)$, $p(w)$ が従属するための必要十分条件は u, v, w が H 上の一直線上にあることである。a, a' を $p(a) = A$, $p(a') = BC$ となる H の元とする。$(BC)A \perp D$ であるから, a, a', y は線形従属である。即ち, aa' は L に直交する。同様に, b, b' を $p(b) = B$, $p(b') = CA$ となる H の元とするとき, bb' も L に直交する。一方, e を $p(e) = (AB)C$ となる H の元とすれば, $(AB)C \perp D$ であるから, e は L 上にある。$A, B, (AB)C \in O_{AB}$ であるから, a, b, e は一直線上にあり, $BC, CA, (AB)C \in O_C$ であるから, a', b', e も一直線上にある。ab' と

$a'b$ の交点を f とすれば, $p(f) = ((CA)A)((BC)B)$ である (図 11 参照)。したがって, f は L 上にある。チェバの定理により , 線分 $\overline{aa'}$ の中点 $(a+a')/2$ は L 上にある。即ち, a と a' は L に関して対称である。したがって, A と BC は D に関して対称である。B と CA, C と AB に関しても同様である。

D が点の場合は $D = [x^2+y^2+1]$ であり , 図 11 の 12 点の対象の中に $O_{[x]}$ に含まれるものはないとしてよい。

$$H = \{x+ty+u(x^2+y^2+1) \in V \mid t, u \in \mathbf{R}\} \supset L = \{x+ty \mid t \in \mathbf{R}\}$$

として上と同様にすればよい。 ■

上の定理の仮定が成り立つとき, 明らかに, A, B, C の少なくとも二つは直線である。A, B, C, E を定理 13 の通りとする。$((AB)B)((CA)C)$ は $O_A \cup O_{BC}$ に属さず, $O_E \cup O_A \cup O_{BC} = S(A,B,C)$ であるから , O_E に属す。したがって, 上の定理より , E に関して BC, CA, AB はそれぞれ A, B, C と対称である。

次に, 図 11 の 12 点の対象の中に同じものがある場合について考える。A, B, C は相異なる対象で (i)-(iv) のいずれでもないとする。このとき, A が BC, CA, AB, $(BC)A$, $((AB)B)((CA)C)$ のいずれとも異なることは容易にわかる。

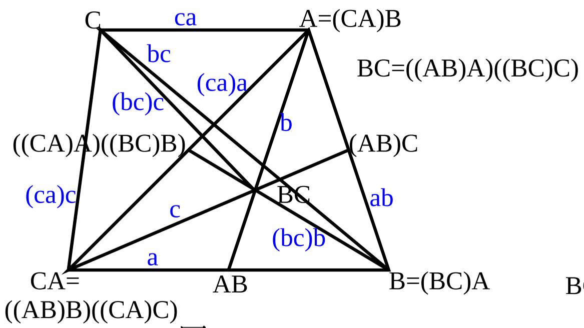

図 13

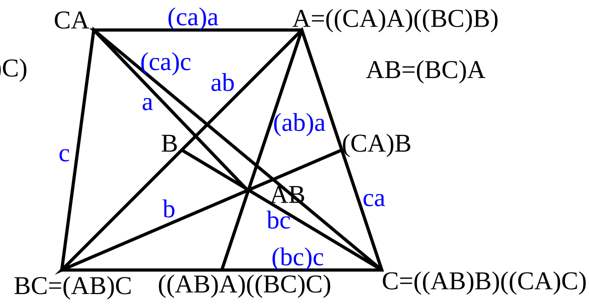

図 14

$A = (CA)B$ であると仮定する。$A \perp B$ であるから , $B = (BC)A$, $BC = ((AB)A)((BC)C)$, $CA = ((AB)B)((CA)C)$ である。$O_D \subset S(A,B,C)$ となる対象 D が存在すると仮定する。図 13 の同一直線上にある 2つの対象は O_D に含まれないから , $A \in O_D$ ならば, 図 13 の中の他の 7 点の対象はどれも O_D に含まれない。$B \in O_D$, $CA \in O_D$ としても同様であるから , $O_D \cup O_E \cup O_F = S(A,B,C)$ となる対象 D, E F は存在しない。また, V の 0 を通らない平面上でチェバの定理とメネラウスの定理を用いれば, AB, $(AB)C$, $((CA)A)((BC)B)$ が従属しないこともわかる。図 13 の同一直線上の 3つの対象は $S(A,B,C) \setminus O_D$ に含まれないことに注意すれば, $O_D \subset S(A,B,C)$ となる対象 D は存在しないことがわかる。$A = (AB)C$ と仮定した場合も同様である。

$A = ((CA)A)((BC)B)$ であると仮定する。$AB \perp BC$ であるから , $AB = (BC)A$, $BC =$

$(AB)C$, $C=((AB)B)((CA)C)$ である。上と同様にして $O_D \subset S(A,B,C)$ となる対象 D が存在しないことがわかる (図 14 参照)。$A=((AB)A)((BC)C)$ と仮定した場合も同様である。

BC, CA, AB の中に同じものがあれば, A, B, C は従属する。したがって, A, B, C が相異なる対象で (i)-(iv) のいずれでもないときは A, B, C, BC, CA, AB の中に同じものはない。また, 同じ仮定の下で, 図 11 の中の他の六つの対象の中にも同じものがないことも容易にわかる。例えば, $(AB)C=(CA)B$ ならば, $AB=CA$ だから A, B, C は従属する。

4 双対性

A, B, C を相異なる対象とし, $S(A,B,C)$ の元 M に対し, $M|A$, $M|B$, $M|C$ の中の少なくとも二つが定義され, 相異なるとするとき, その二つから決まる対象を M^* とする。A, B, C が (i)-(iv) のいずれでもないとすれば, $A^*=((AB)B)((CA)C)$, $(AB)^*=(AB)C$ である。

定理 23. A, B, C が相異なる対象で, $M\in S(A,B,C)$ に対して M^* が定義されるとき, $M^*\in S(A,B,C)$ であり, $(M^*)^*=M$ である。

証明 $M|A$ が定義されるとき, 系 4 より, $M^*A=M|A$, $M^*|A=MA$ である。$M|B$, $M|C$ に対しても同様である。系 5 より, $(M^*|A)(M^*|B)=(MA)(MB)=M$ である。■

定理 24. A, B, C は相異なる対象で (i)-(iv) のいずれでもないとする。このとき, すべての $M\in S(A,B,C)$ に対して M^* が定義され, $M^*\neq M$ である。

証明 M が A と異なる対象ならば, $M|A$ は定義される。M が A, B と異なり, $M|A=M|B$ ならば, $M=AB$ である。このとき, $M\neq C$ であるから, $M|C$ は定義され, 仮定より A, B, C は従属しないから, $M|A\neq M|C$ である。したがって, すべての $M\in S(A,B,C)$ に対して M^* が定義される。

M が A と異なり, $M^*=M$ ならば, $(M|A)\perp M$ である。$(M|A)\perp M$ となるのは M が Γ 上の点で, A が M を通る直線か M と A が極限平行な直線のときだけである。M が A, B のそれぞれに極限平行な直線ならば, $C\neq M$ であり, $(M|C)\not\perp M$ である。したがって, $M^*\neq M$ である。■

5 等角共役点と等長共役点

双曲平面上でも等角共役点が定義できることを示し, それを用いて $S(A,B,C)$ にもう一つの双対性があることを示す。m_1, m_2, m_3 を線形独立な V の元で $m_1^2=m_2^2=m_3^2\neq 0$

を満たすとする。$[m_1]$, $[m_2]$, $[m_3]$ はすべて点であるかすべて直線である。$m^2 \neq 0$ を満たす V の元 m に対して V の線形変換 β_m を

$$\beta_m(l) = l - \frac{2l \cdot m}{m^2} m$$

と定義する ([1], 43 ページ参照)。$[m_1]$, $[m_2]$ が点のときは $[m_1 - m_2]$ は線分 $[m_1][m_2]$ の中点または垂直二等分線であり ([1], 定理 2.16), $[m_1]$, $[m_2]$ が交わる直線のときは $[m_1 - m_2]$ は $[m_1]$ と $[m_2]$ のなす角の二等分線である ([1], 系 2.20)。$\beta_{m_1 - m_2}(m_1) = m_2$, $\beta_{m_1 - m_2}(m_2) = m_1$ であるから, $M_1 = [m_1]$, $M_2 = [m_2]$ が直線で $P = [m_1 * m_2]$ が点のとき, $l \cdot (m_1 * m_2) = 0$ となる $V \setminus \{0\}$ の元 l に対して $l' = \beta_{m_1 - m_2}(l)$ とすれば, $L = [l]$, $L' = [l']$ は P を通る直線で L と M_1 のなす角と L' と M_2 のなす角は等しい ([1], 定理 2.19)。

定理 25. m_1, m_2, m_3 を上の通りとし, l_1, l_2, l_3 を線形従属な V の元でどの二つも線形独立であり, $l_1 \cdot (m_2 * m_3) = l_2 \cdot (m_3 * m_1) = l_3 \cdot (m_1 * m_2) = 0$ を満たすとする。$l'_1 = \beta_{m_2 - m_3}(l_1)$, $l'_2 = \beta_{m_3 - m_1}(l_2)$, $l'_3 = \beta_{m_1 - m_2}(l_3)$ とすれば, l'_1, l'_2, l'_3 も線形従属である。

証明 l_1, l_2, l_3 を実数倍に置き換えて $l_1 + l_2 + l_3 = 0$ であるとしてよい。仮定より,

$$l_1 = a_2 m_2 + b_3 m_3, \quad l_2 = a_3 m_3 + b_1 m_1, \quad l_3 = a_1 m_1 + b_2 m_2$$

を満たす実数 a_2, b_3, a_3, b_1, a_1, b_2 がある。m_1, m_2, m_3 は線形独立で $l_1 + l_2 + l_3 = 0$ であるから, $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = 0$ である。$\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$ に対して $\beta_{m_i - m_j}(m_i) = m_j$, $\beta_{m_i - m_j}(m_j) = m_i$ であるから,

$$l'_1 = a_2 m_3 + b_3 m_2, \quad l'_2 = a_3 m_1 + b_1 m_3, \quad l'_3 = a_1 m_2 + b_2 m_1$$

である。したがって,

$$a_1 l'_1 + a_2 l'_2 + a_3 l'_3 = a_3(a_2 + b_2)m_1 + a_1(a_3 + b_3)m_2 + a_2(a_1 + b_1)m_3 = 0$$

である。$a_1 = a_2 = a_3 = 0$ とすると $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ となり, $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ となってしまうから, a_1, a_2, a_3 のすくなくとも一つは 0 ではない。 ■

ユークリッド平面上では, 三角形の垂心の等角共役点は外心であるが, 双曲平面上では, 一般にそうならない (図 15 参照)。双曲平面上でも鋭角三角形の垂心は三角形の内部にあり, その等角共役点も内部にある。しかし, 双曲平面上では鋭角三角形の外心が三角形の外部にあることもある。一方, 上の定理において $M_1 = [m_1]$, $M_2 = [m_2]$, $M_3 = [m_3]$, $L_1 = [l_1]$, $L_2 = [l_2]$, $L_3 = [l_3]$ がすべて点のときは L_1 は直線 $M_2 M_3$ 上にあり, $L'_1 = [l'_1]$ は線分 $M_2 M_3$ 上の点で線分 $M_2 L_1$ と $M_3 L'_1$ の長さは等しい。L_2, $L'_2 = [l'_2]$, L_3, $L'_3 = [l'_3]$ に対しても同様である。上の定理により, L_1, L_2, L_3 が一直線上にあれば, L'_1, L'_2, L'_3 も一直

線上にある。これはユークリッド平面上ではメネラウスの定理を使えば, 容易に証明できる。

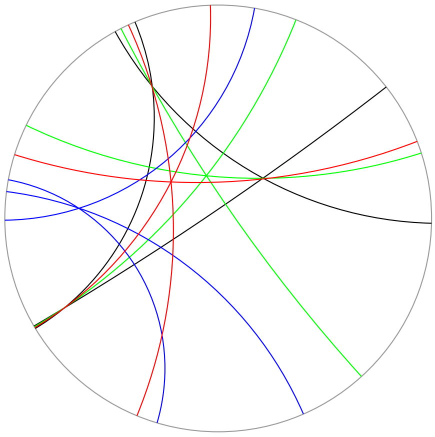

図 15

A, B, C は相異なる対象ですべて点であるかすべて直線であるとする。前者の場合, BC, CA, AB はすべて直線である。後者の場合, さらに BC, CA, AB はすべて点であるかすべて直線であるとする。a, b, c を

$$[a]=BC,\ [b]=CA,\ [c]=AB,\quad a^2=b^2=c^2$$

を満たす $V\setminus\{0\}$ の元とする。$M\in S(A,B,C)$ に対して d, e, f, g, h, i を

$$[d]=MA,\ [e]=MB,\ [f]=MC,\ [g]=M|A,\ [h]=M|B,\ [i]=M|C$$

を満たす $V\setminus\{0\}$ の元とする。このとき,

$$d\cdot(b*c)=e\cdot(c*a)=f\cdot(a*b)=g\cdot(b*c)=h\cdot(c*a)=i\cdot(a*b)=0$$

である。

$$d_2=\beta_{b-c}(d),\quad e_2=\beta_{c-a}(e),\quad f_2=\beta_{a-b}(f)$$

とする。d, e, f は線形従属であるから, 定理 25 より, d_2, e_2, f_2 も線形従属である。したがって, $[d_2*e_2]=[e_2*f_2]=[f_2*d_2]$ である。$M^\sharp=[d_2*e_2]$ とすれば, $M^\sharp A=[d_2]$, $M^\sharp B=[e_2]$, $M^\sharp C=[f_2]$ である。

$$g_2=\beta_{b-c}(g),\quad h_2=\beta_{c-a}(h),\quad i_2=\beta_{a-b}(i)$$

とすれば, $d\cdot g=e\cdot h=f\cdot i=0$ であるから, $d_2\cdot g_2=e_2\cdot h_2=f_2\cdot i_2=0$ である。したがって, $M^\sharp|A=[g_2]$, $M^\sharp|B=[h_2]$, $M^\sharp|C=[i_2]$ である。一方, $M\in S(A,B,C)$ であるから, g, h, i は線形従属である。したがって, 定理 25 より g_2, h_2, i_2 も線形従属である。ゆ

えに, $M^\sharp \in S(A,B,C)$ である。定義から, 明らかに $(M^\sharp)^\sharp = M$, $(M^\sharp)^* = (M^*)^\sharp$ である (図 16 参照)。

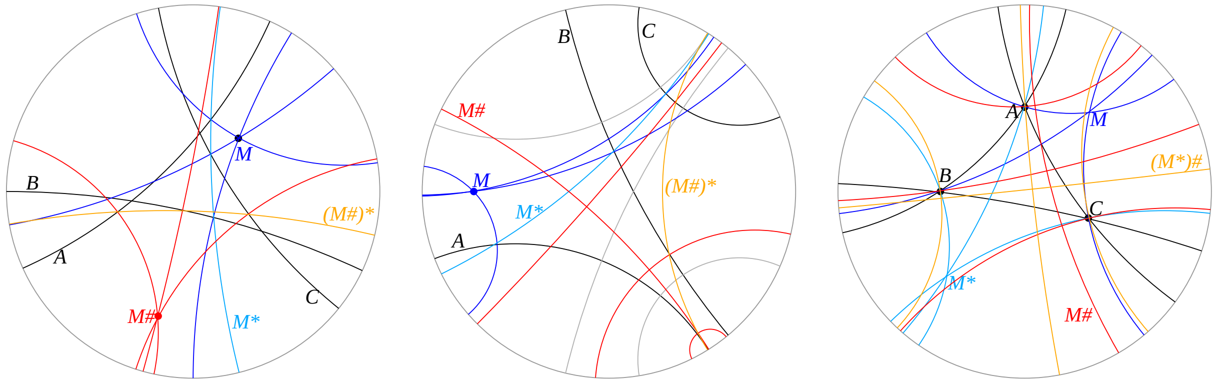

図 16

次に, 等長共役点も定義できることを示す。m_1, m_2, m_3 は上と同じとし, $n_1 = m_2 * m_3$, $n_2 = m_3 * m_1$, $n_3 = m_1 * m_2$ とする。$m_1^2 = m_2^2 = m_3^2 < 0$ とし, 必要ならば, -1 倍して m_1, m_2, m_3 の x^2+y^2+1 の係数はすべて正であるとすれば, $[m_i - m_j]$ は線分 $[m_i][m_j]$ の垂直二等分線である ([1], 定理 2.16)。したがって, $[l]$ が直線 $[m_i][m_j]$ 上の点のとき, $[\beta_{m_i-m_j}(l)]$ も $[m_i][m_j]$ 上の点であり, 線分 $[l][m_i]$ と $[\beta_{m_i-m_j}(l)][m_j]$ の長さは等しい。

定理 26. $m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3$ を上の通りとし, l_1, l_2, l_3 を V の元で $l_1 \cdot n_1 = l_2 \cdot n_2 = l_3 \cdot n_3 = 0$ を満たすとする。さらに, $l_1 * m_1$, $l_2 * m_2$, $l_3 * m_3$ は線形従属であり, どの二つも線形独立であるとする。$l_1' = \beta_{m_2-m_3}(l_1)$, $l_2' = \beta_{m_3-m_1}(l_2)$, $l_3' = \beta_{m_1-m_2}(l_3)$ とすれば, $l_1' * m_1$, $l_2' * m_2$, $l_3' * m_3$ も線形従属である。

証明　l_1, l_2, l_3 を実数倍に置き換えて $l_1 * m_1 + l_2 * m_2 + l_3 * m_3 = 0$ であるとしてよい。

$$l_1 = a_2 m_2 + b_3 m_3, \quad l_2 = a_3 m_3 + b_1 m_1, \quad l_3 = a_1 m_1 + b_2 m_2$$

を満たす実数 $a_2, b_3, a_3, b_1, a_1, b_2$ がある。n_1, n_2, n_3 は線形独立であり,

$$l_1 * m_1 = -a_2 n_3 + b_3 n_2, \; l_2 * m_2 = -a_3 n_1 + b_1 n_3, \; l_3 * m_3 = -a_1 n_2 + b_2 n_1$$

であるから, $-a_2 + b_1 = -a_3 + b_2 = -a_1 + b_3 = 0$ である。

$$l_1' = a_2 m_3 + b_3 m_2, \quad l_2' = a_3 m_1 + b_1 m_3, \quad l_3' = a_1 m_2 + b_2 m_1$$

であるから,

$$\begin{aligned}
& a_3 l_1' * m_1 + a_1 l_2' * m_2 + a_2 l_3' * m_3 \\
= \; & a_3(a_2 n_2 - b_3 n_3) + a_1(a_3 n_3 - b_1 n_1) + a_2(a_1 n_1 - b_2 n_2) \\
= \; & a_1(a_2 - b_1) n_1 + a_2(a_3 - b_2) n_2 + a_3(a_1 - b_3) n_3 = 0
\end{aligned}$$

である。$a_1 = a_2 = a_3 = 0$ とすると $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ となり , $l_1 * m_1 = l_2 * m_2 = l_3 * m_3 = 0$ となってしまうから , a_1, a_2, a_3 のすくなくとも一つは 0 ではない。 ■

$M_1, M_2, M_3, L_1, L_2, L_3$ が全て点のときは L_1', L_2', L_3' も点であり , 上の定理は等長共役点が定義できることを示している。ただし , M_1L_1, M_2L_2, M_3L_3 が一点で交わっても $M_1L_1', M_2L_2', M_3L_3'$ は一点で交わる代わりにどれとも直交する直線が存在する場合がある。一方, M_1, M_2, M_3 がすべて直線で $P_1 = M_1L_1, P_2 = M_2L_2, P_3 = M_3L_3, Q_1 = M_1L_1',$ $Q_2 = M_2L_2', Q_3 = M_3L_3'$ がすべて点のときは上の定理は
「 三辺形 $M_1M_2M_3$ の辺 M_1, M_2, M_3 上の点 P_1, P_2, P_3 が一直線上にあれば, $(M_2M_3)P_1,$ $(M_3M_1)P_2, (M_1M_2)P_3$ の等角共役線と M_1, M_2, M_3 との交点も一直線上にある。」を意味する。

参考文献

[1] 土橋宏康著「 双曲平面上の幾何学」内田老鶴圃 ISBN978-4-7536-0200-1