

高等学校までの数学と計算機で楽しむ代数 曲線の世界

土橋 宏康

まえがき

この本の題名にあるように大学で学ぶ数学の知識のない読者にも代数曲線の世界を楽しんで頂こうというのが本書の目的の一つである。第 4 節までの定理にはベズーの定理を除いてすべて証明を付けてあるが、高校までの数学を勉強していれば、理解できるはずである。できればそれらの証明まで読んで欲しいのであるが、証明はとばして高次の代数曲線で起きる現象を観察し、楽しんでみるという読み方もできる。高校で二次曲線までは習うが、三次以上の曲線に興味を持ったとしても筆者らが高校生の頃は図を描いてどんな形をしているか観るなどということではできなかった。しかしながら、最近は高性能なコンピューターを個人でも使えるようになり、そのようなことも可能になった。もし読者が手元にコンピューターを持っていて、さらには Linux 等の UNIX 系の OS がインストールされているならば、付録のプログラムを使って図を描きながら読み進めてほしい。本書のもう一つの目的はコンピューター（さらには UNIX という OS）を数学の勉強に役立てるための一つの例を示したかったことである。筆者は 20 代後半にコンピューターが個人でも購入して使えるという時期に巡りあった。そのとき幸運にも OS9 という UNIX ライクな OS と出会い、コンピューターを使い始めたときから UNIX のすばらしさに接することができた。この感激を多くの人に共有してもらいたいと考えたのである。

1 代数曲線入門

$P(x, y)$ を x と y の多項式とすると、 $P(x, y) = 0$ を満たす xy 平面上の点の集合を $P(x, y)$ で表される代数曲線と呼ぶ。例えば、 $x^2 + y^2 - 1$ で表される代数曲線は原点を中心とし半径 1 の円である。 $P(x, y)$ の最高次の次数を $P(x, y)$ の次数といい、 $\deg P$ で表す。例えば、 $x^3y + x^2y + xy^2 - y + 1$ の次数は 4 である。 $\deg P = n$ のとき、 $P(x, y)$ で表される曲線を n 次曲線と呼ぶ。例えば、直線は一次曲線であり、円は二次曲線である。多項式 $F(x, y)$ が二つの定数でない多項式 $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ の積であるとき $F(x, y)$ で表される代数曲線は $F_1(x, y)$ と $F_2(x, y)$ で表される代数曲線の和である。多項式

$P(x, y)$ が二つの定数でない多項式の積にならないとき $P(x, y)$ およびそれで表される曲線は既約であるという。

高等学校で習うように相異なる 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ が与えられれば、その二点を通る直線がただ一つ決まり、その定義式は

$$(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

である¹。二次以上の曲線の場合はどうだろうか。 x と y の n 次の多項式

$$c_{n,0}x^n + c_{n-1,1}x^{n-1}y + \cdots + c_{0,n}y^n + c_{n-1,0}x^{n-1} + \cdots + c_{0,1}y + c_{0,0}$$

を考える。係数 $c_{i,j}$ の個数は

$$(n+1) + n + \cdots + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

である。この多項式に 0 でない定数を掛けても表す曲線は変わらないから、係数 $c_{n,0}, c_{n-1,1}, \dots, c_{0,0}$ の比が問題である。平面上のいくつかの点を与えられたとき、その座標を上記の多項式に代入すれば、係数 $c_{n,0}, \dots, c_{0,0}$ を未知数とする連立方程式が得られる。

定理 1 m を 2 以上の整数とすると、未知数が m 個、定数項が 0 の式 $m-1$ 個からなる連立方程式

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{m-1,1}x_1 + a_{m-1,2}x_2 + \cdots + a_{m-1,m}x_m = 0 \end{cases}$$

は $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ 以外の解を持つ。

証明 m に関する帰納法で証明する。

$m = 2$ のときは明らかに正しい。

$m = k - 1$ のとき正しいと仮定して $m = k$ の場合を考える。

$$a_{1,1} = a_{2,1} = \cdots = a_{k-1,1} = 0$$

ならば $x_1 = 1, x_2 = x_3 = \cdots = x_k = 0$ は解である。そこで $a_{i,1} \neq 0$ とする。 $1 \leq j \leq k-1, j \neq i$ なるすべての j について i 番目の方程式の $-a_{j,1}/a_{i,1}$ 倍を j 番目の方程式に加えると解は変わらないが、 i 番目以外の方程式の x_1 の係数は 0 になる。そこで i 番目を除いたものを未知数が x_2, x_3, \dots, x_k の $k-1$ 個で方程式が $k-2$ 個の連立方程式と考えると帰納法の仮定から

¹高校の教科書では通常 y 軸に平行な直線は $x = a$ 、そうでない直線は $y = ax + b$ で表しているが、 $ax + by + c = 0$ で表すことにすれば場合分けしなくてすむのと 2 次以上の曲線との表記の統一のためにこの本では上記のように表すことにする

$x_2 = x_3 = \dots = x_{k-1} = 0$ 以外の解がある。これを i 番目の方程式に代入して x_1 を求めれば、 $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ 以外の解が求まる。 (終)

平面上に

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$$

個の点が与えられると上の定理によりそれらの点を通る n 次曲線が一つ定まる。ほとんどの場合は一つだけであるが、点集合が特別な位置にあるときはただ一つには定まらない。例えば、点集合が一直線上にあるときはその直線と任意の $n-1$ 次曲線の和の n 次曲線は与えられた点を通る。また、上の定理で方程式が m 個以上になると一般には $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ 以外の解を持たない (大学の線形代数で習う)。従って、平面上に $(n+1)(n+2)/2$ 個以上の点が与えられたとき、これらの点を通る n 次曲線は一般には存在しない。

$n = 2$ の場合、 $2 \cdot (2+3)/2 = 5$ であるから、相異なる 5 点が与えられれば、それらの点を通る二次曲線がある。5 点の座標を

$$c_{2,0}x^2 + c_{1,1}x + c_{0,2}y^2 + c_{1,0}x + c_{0,1}y + c_{0,0} = 0$$

に代入して得られる五つの式を $c_{2,0}, \dots, c_{0,0}$ を未知数とする連立方程式として解くことにより、二次曲線の定義式を求めることもできるが、もっと簡単な方法はないだろうか (問題 1)。5 点を通る二次曲線が二直線ならば、3 点は一方の直線上にある。従って、どの 3 点も一直線上にない 5 点を通る二次曲線は既約であり、次のベズーの定理によりただ一つに決まる ($5 > 2 \cdot 2$)。

ベズーの定理 (実数バージョン) C と D を次数がそれぞれ m と n の代数曲線で共通の既約成分を持たないとすると C と D の交点は mn 個以下である。

L_1 と L_2 を相異なる直線で点 P で交わっているとする。 L_i の定義式を l_i とするとき、0 でない定数 c_1, c_2 に対して $c_1 l_1 + c_2 l_2$ で表される直線は明らかに点 P を通る。逆に、 L を点 P を通り、 L_1, L_2 と異なる任意の直線としたとき、 L 上に点 P と異なる点 Q をとり、 $c_1 = l_2(Q)$, $c_2 = -l_1(Q)$ とすれば、 $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ であり、 $c_1 l_1 + c_2 l_2$ で表される直線は二点 P, Q を通るから、 L に他ならない。

注 L_1 と L_2 は異なる直線であるから $c_1 = c_2 = 0$ のとき以外は $c_1 l_1 + c_2 l_2$ が恒等的に 0 に等しくはならない。

定理 2 L_1, L_2, L_3 をそれぞれ l_1, l_2, l_3 で表される相異なる直線で一点で交わらず、どの二本も平行でないとする。任意の直線は定数 c_1, c_2, c_3 によ

り $c_1l_1 + c_2l_2 + c_3l_3$ で表される。

証明 L_i と L_j の交点を $P_{i,j}$ とする。仮定より $P_{1,2} \neq P_{2,3} \neq P_{3,1} \neq P_{1,2}$ である。直線 L が $P_{1,2}$ を通れば、上記のようにして $c_1l_1 + c_2l_2 + 0l_3$ で表せる。 $P_{2,3}, P_{3,1}$ を通るときも同様であるから、以下 L がこれらの三交点を通らない場合を考える。 L と L_1, L_2 の交点をそれぞれ P, Q とし、

$$c_1 = l_2(P)l_3(Q), \quad c_2 = l_3(P)l_1(Q), \quad c_3 = -l_2(P)l_1(Q)$$

とし、 $f = c_1l_1 + c_2l_2 + c_3l_3$ とする。 $l_1(P_{1,2}) = l_2(P_{1,2}) = 0, l_3(P_{1,2}) \neq 0, c_3 \neq 0$ 、であるから $f(P_{1,2}) \neq 0$ である。従って、 f は恒等的に 0 に等しくない。 $l_1(P) = l_2(Q) = 0$ であるから $f(P) = f(Q) = 0$ である。従って、 f で表される直線は P, Q を通るから直線 L に他ならない。 (終)

定理 3 L_1, L_2, L_3 をそれぞれ l_1, l_2, l_3 で表される相異なる直線で一点で交わらず、どの二本も平行でないとする。任意の二次曲線 C は定数 c_1, c_2, \dots, c_6 により

$$c_1l_1^2 + c_2l_2^2 + c_3l_3^2 + c_4l_2l_3 + c_5l_3l_1 + c_6l_3l_1$$

で表される。

証明 C が二直線のときは上の定理より、各直線は l_1, l_2, l_3 の一次式で表され、 C はそれらの積で表される。以下、 C が二直線でない場合を考える。 C 上に相異なる 5 点をとれば、 c_1, c_2, \dots, c_6 を未知数とする五つの方程式が得られる。定理 1 により $c_1 = c_2 = \dots = c_6 = 0$ 以外の解が得られ、上の式で表される二次曲線を C' とすれば、 C と C' は 5 点で交わるからベズーの定理より $C' = C$ である。 (終)

F, G をそれぞれ f, g で表される n 次代数曲線とする。同時に 0 とならない定数 c, d に対して $cf + dg$ で表される代数曲線は F と G の交点を通る。

問題 1 相異なる 5 点 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 の座標が与えられたときに、この 5 点を通る二次曲線の定義式をできるだけ簡単な方法で求めるにはどうしたらよいか。

2 パスカルの定理とその拡張

本来のパスカルの定理は次の通りである。

パスカルの定理 六角形 $ABCDEF$ が円に内接しているとき、 AB と DE の交点、 BC と EF の交点、 CD と FA の交点は一直線上にある。

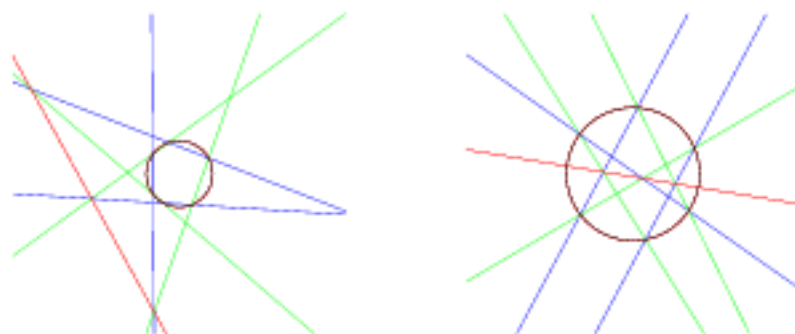


図 1: パスカルの定理

この定理は円を二次曲線にしても成り立つ。特に、二直線のときにはパップスの定理と呼ばれている。また、この定理を初等幾何で証明しようとするとかかなり難しいが、前節のバズーの定理を使えば、以下のように拡張した定理まで簡単に証明できる。

パスカルの定理の拡張 n を 3 以上の整数、 C を二次曲線とする。 $L_1, M_1, L_2, M_2, \dots, L_n, M_n$ を相異なる直線でどの 3 本も一点で交わらないとする。 $2n$ 個の交点 $L_1M_1, M_1L_2, L_2M_2, \dots, L_nM_n, M_nL_1$ が C 上にあれば他の $n^2 - 2n = n(n - 2)$ 個の L_i と M_j の交点は $n - 2$ 次曲線上にある。

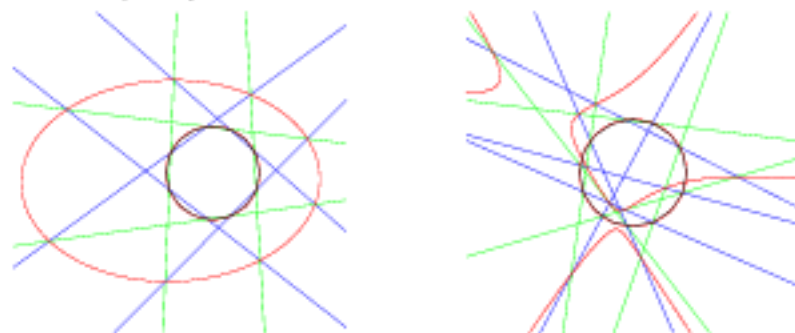


図 2: パスカルの定理の拡張

注 L_i と C は二点でしか交わらないから $M_1, \dots, M_{i-2}, M_{i+1}, \dots, M_n$ と L_i の交点は C 上にない。前節で書いたように $n - 2$ 次曲線の係数の個数は $(n - 1)n/2$ であるから平面上の勝手な $n(n - 2)$ 個の点を通る $n - 2$ 次曲線は存在しない。

C が二直線ではないときの証明 L_i, M_j の定義式をそれぞれ l_i, m_j とする。

C 上に $L_1M_1, M_1L_2, \dots, L_nM_n, M_nL_1$ と異なる点 P をとり、

$$c = (m_1m_2 \cdots m_n)(P), \quad d = (l_1l_2 \cdots l_n)(P)$$

とすれば、 $c \neq 0, d \neq 0$ であり、

$$cl_1l_2 \cdots l_n - dm_1m_2 \cdots m_n$$

で表される n 次曲線 E は L_i と M_j の n^2 個の交点および P を通る。 C と E は $L_1M_1, M_1L_2, \dots, L_nM_n, M_nL_1, P$ の $2n+1$ 個の点を共有するから、第一節のベズーの定理により、 C は E の既約成分である。従って、 E は C と $n-2$ 次曲線の和になる。 (終)

問題 2 C が二直線するとき ($L_1M_1, L_2M_2, \dots, L_nM_n$ が直線 N_1 上にあり、 $M_1L_2, M_2L_3, \dots, M_nL_1$ が直線 N_2 上にある) に上の定理を証明せよ。

問題 3 $x^2 + y^2 - 1$ で表される円上の 6 点

$$(0, 1), \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right), (1, 0), (0, -1), \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

を順に結んでできる直線を $L_1, M_1, L_2, M_2, L_3, M_3$ としたときにこれらの直線の定義式を求め、上の定理の証明を確かめてみよ。

パスカルの定理の拡張の証明と同様にして次の定理も証明できる。

定理 4 $L_1, \dots, L_n, M_1, \dots, M_n$ を相異なる $2n$ 本の直線でどの三本も一点では交わらないとする。 L_1 と M_1 の交点、 L_2 と M_2 の交点、 \dots, L_n と M_n の交点が一直線上にあれば、 L_i と M_j の交点 ($i \neq j$) は $n-1$ 次曲線上にある。

パスカルの定理において B, D, F をそれぞれ C, E, A に近づけていったときの極限を考えると直線 BC, DE, FA はそれぞれ頂点 C, E, A における円の接線になるので次の定理が得られる。

定理 5 三角形 ACE が円に内接しているとし、頂点 A, C, E における円の接線をそれぞれ a, c, e とするとき、 a と CE の交点、 c と EA の交点、 e と AC の交点は一直線上にある。

パスカルの定理の拡張においても同様の極限を考えることにより次の定理が得られる。

定理 6 n 角形 $P_1P_2 \cdots P_n$ が円に内接しているとし、頂点 P_1 における円の接線を L_1 としたとき、 n 角形 $P_1P_2 \cdots P_n$ の辺の延長と L_1 との交点は $n-2$ 次曲線上にある。

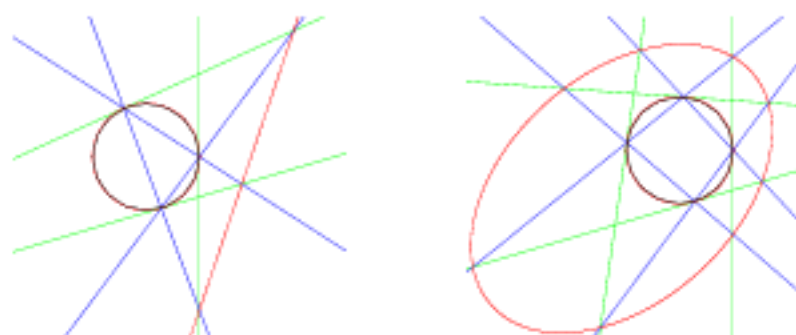


図 3: パスカルの定理の極限

3 ポンスレーの閉形定理とドルポーの定理

この節ではポンスレーの閉形定理とドルポーの定理を紹介する。

ポンスレーの閉形定理 n を 3 以上の整数とする。 n 角形が円 C に外接し、円 D に内接していれば、円 D の任意の点に対して、その点を頂点の一つとする n 角形で円 C に外接し、円 D に内接するものがある。

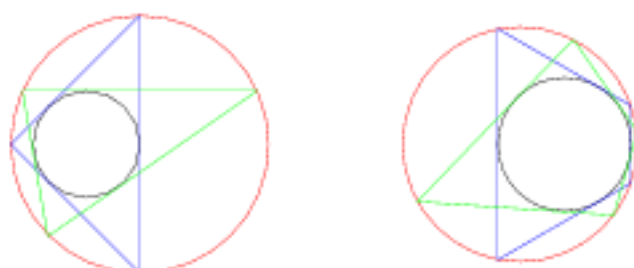


図 4: ポンスレーの閉形定理

このポンスレーの閉形定理の証明はかなり難解なため割愛するが、 $n = 3$ の場合にはコンパスと定規だけで作図することができるので自分で作図して確かめてみてほしい。まず、円とその相異なる三本の接線を描いてできる三角形の外接円を描く。次に、外接円の任意の点から内接円に二本の接線を引き、外接円との交点を結ぶ直線が内接円に接することを確かめればよい。

このポンスレーの定理は二つの円を二直線ではない二次曲線に置き換えても成り立つ。さらに n が偶数のときには D を二直線にしても成り立つ。 $n = 4$ のときには次のように定規とコンパスだけで作図して確かめることができる。円 C の相異なる接線を四本引き L_1, L_2, L_3, L_4 とする。 L_1, L_2 の交点と L_3, L_4 の交点を通る直線を M_1 とし、 L_2, L_3 の交点と L_4, L_1 の交点を通

る直線を M_2 とする。 L_1, L_2, L_3, L_4 と異なる円 C の接線を引き L'_1 とし、 L'_1, M_1 の交点から円 C に L'_2 と異なる接線を引き L'_3 とする。 L'_3, M_2 の交点から円 C に L'_4 と異なる接線を引き L'_5 とする。 L'_5, M_1 の交点から円 C に L'_6 と異なる接線を引き L'_7 とする。このとき L'_7, L'_1 の交点は M_2 上にあるはずである。さらに、次のドルボアの定理により、 L_1, L_3 の交点、 L_2, L_4 の交点、 L'_1, L'_5 の交点、 L'_3, L'_7 の交点は一直線上にある。

また $n=3$ の場合で D を 3 次以上の代数曲線に一般化したドルボアの定理が成り立つ。 C を二直線ではない二次曲線とする。 n を 3 以上の整数とし、 L_1, L_2, \dots, L_n を相異なる C の接線とする。円の外部の点から円には二本の接線しか引けないように C 上にない点から C への接線は多くとも二本であることも簡単にわかるので、この n 本の直線のうちの 3 本も一点では交わらないことがわかる。 L_i と L_j の交点を P_{ij} とし、これらの $n(n-1)/2$ 個の交点の集合を S で表すことにする。

ドルボアの定理 E を S の全ての点を通り、 L_1, L_2, \dots, L_n を既約成分に含まない $n-1$ 次曲線とする。 L_1, \dots, L_n と異なる C の接線 M_1 が E と Q_2, Q_3, \dots, Q_m ($m \leq n$) で交われば、これらの点を通る C の接線で M_1 と異なるものを M_2, \dots, M_m とするとき、すべての $2 \leq i < j \leq m$ に対して M_i と M_j の交点は E 上にある。

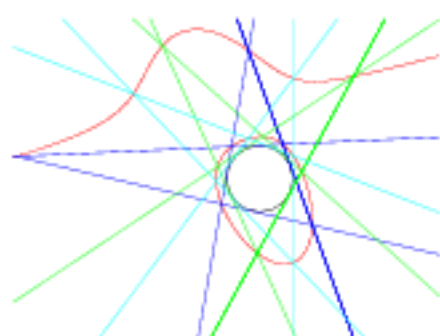


図 5: ドルボアの定理

$n=4$ で E が三直線からなる (図 7 参照) ときにはこのドルボアの定理もコンパスと定規だけで作図することができるので自分で確かめてほしい。 $n \geq 5$ の場合は次節で考察するが、 E が直線だけからなることはないのでコンパスと定規だけで作図することはできない。しかし計算機が使える環境であれば巻末の付録を参考にして確かめてみることもできるので試してほしい。

以後、 S のすべての点を通る $n-1$ 次曲線をドルボア曲線と呼ぶことにする。 $n-1$ 次曲線の定義式の係数の個数は $n(n+1)/2$, S の元の個数は $n(n-1)/2$

であり、

$$\frac{n(n+1)}{2} - 1 - \frac{n(n-1)}{2} = n - 1 > 0$$

であるから、ドルボー曲線は沢山存在する。実際、平面上に S に含まれない $n-1$ 個の点をとれば、定理 1 により S とそれらの $n-1$ 個の点を通る $n-1$ 次曲線が存在する。直線 L_i の定義式を l_i 、 c_1, c_2, \dots, c_n を定数とし、

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \frac{l_1 l_2 \cdots l_n}{l_i} = c_1 l_2 l_3 \cdots l_n + c_2 l_1 l_3 \cdots l_n + \cdots + c_n l_1 l_2 \cdots l_{n-2} l_{n-1}$$

とする。 P を直線 L_i 上にあり、他の直線 L_j ($j \neq i$) 上にはない点とすれば、 $l_i(P) = 0, l_j(P) \neq 0$ であるから $c_i \neq 0$ ならば、 $f(P) \neq 0$ である。従って、 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ 以外のときは f は恒等的に 0 にはならない。任意の $i \neq j$ に対して $l_i(P_{i,j}) = l_j(P_{i,j}) = 0$ だから $f(P_{i,j}) = 0$ である。従って、 f で表される $n-1$ 次曲線はドルボー曲線である (図 6 参照)。逆に、任意のドルボー曲線は上の f で表すことができることもわかる (定理 8)。

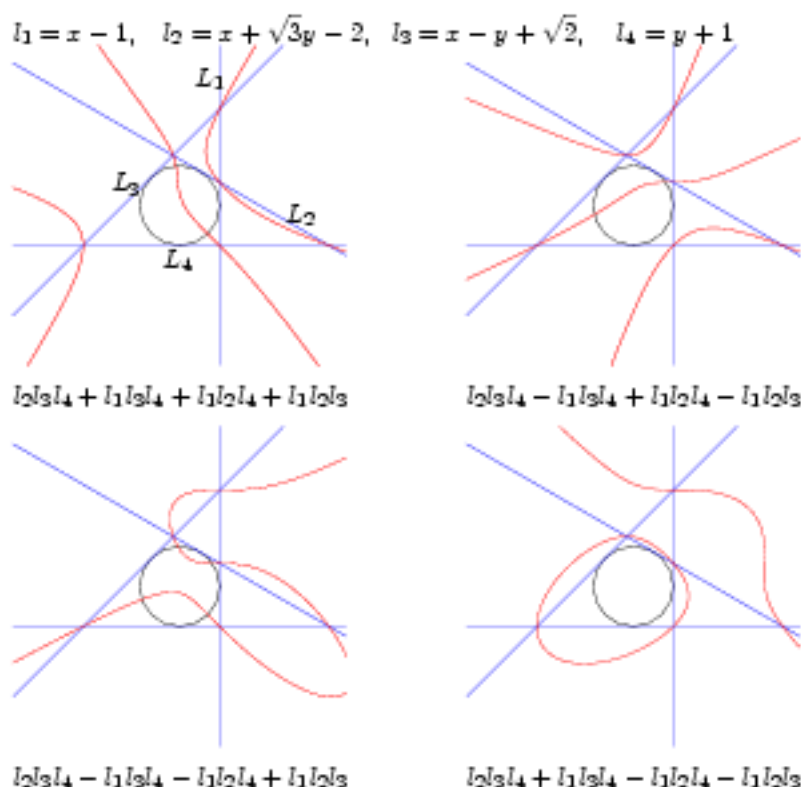


図 6: 交点を通る曲線

補題 7 M を S のどの点も通らない直線とし、 Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1} を M 上の相異なる点とすれば、これらの点を通るドルボー曲線が唯一つ存在し、少

なくとも一つは 0 でない定数 c_1, c_2, \dots, c_n により

$$f = c_1 l_2 l_3 \cdots l_n + c_2 l_1 l_3 \cdots l_n + \cdots + c_n l_1 l_2 \cdots l_{n-2} l_{n-1}$$

で表される。

証明 定理 1 により、定数 c_1, c_2, \dots, c_n を少なくとも一つは 0 ではなく

$$f(Q_1) = f(Q_2) = \cdots = f(Q_{n-1}) = 0$$

が成り立つように定めることができ、そのとき f で表される曲線 F は条件を満たすドルポー曲線である。

次に F の他にも条件を満たすドルポー曲線が存在すると仮定し、その定義式を g とする。直線 M 上に Q_1, \dots, Q_{n-1} とは異なる点 Q_n をとり、 $c = -g(Q_n)$, $d = f(Q_n)$ とする。 $cf + dg$ で表されるドルポー曲線を H とすれば、 H と M は Q_1, \dots, Q_{n-1}, Q_n の n 点で交わるからベズーの定理により、 M は H の既約成分となる。則ち、 H は M と $n-2$ 次曲線 H_2 の和となる。すると H_2 と L_i は $P_{i,j}$ ($i \neq j$) の $n-1$ 点で交わるから H_2 は n 個の直線 L_i を既約成分として含むことになり矛盾。 (終)

E を任意のドルポー曲線とすると、 S のどの点も通らず、 E と $n-1$ 点で交わる直線をとって、その交点を Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1} として上の補題を適用すれば、次の定理が得られる。

定理 8 任意のドルポー曲線は少なくとも一つは 0 でない定数 c_1, c_2, \dots, c_n により

$$c_1 l_2 l_3 \cdots l_n + c_2 l_1 l_3 \cdots l_n + \cdots + c_n l_1 l_2 \cdots l_{n-2} l_{n-1}$$

で表される。

上の定理においてドルポー曲線が L_i を既約成分に含むための必要十分条件は $c_i = 0$ であることは容易にわかる。

補題 9 M_1, M_2, M_3 を C の相異なる接線とする。また、 M_1 と M_2 の交点を Q_3 , M_2 と M_3 の交点を Q_1 , M_3 と M_1 の交点を Q_2 とする。このとき、0 でない定数 a_1, a_2, a_3 が存在して M_1, M_2, M_3 と異なる C の任意の接線の定義式 l に対して

$$\frac{a_1}{l(Q_1)} + \frac{a_2}{l(Q_2)} + \frac{a_3}{l(Q_3)} = 0$$

が成り立つ。

証明 M_i の定義式を m_i とすれば、定理 3 により C は

$$c_1 m_1^2 + c_2 m_2^2 + c_3 m_3^2 + c_4 m_1 m_2 + c_5 m_2 m_3 + c_6 m_3 m_1$$

で表される。 $i \neq j$ のとき $m_i(Q_j) = 0$ であり、点 Q_1, Q_2, Q_3 は C 上にないから、 $c_i \neq 0$ ($1 \leq i \leq 3$) である。上の式に c_1^{-1} を掛けることにより $c_1 = 1$ としてよい。また m_2, m_3 をそれぞれ $\sqrt{|c_2|}^{-1} m_2, \sqrt{|c_3|}^{-1} m_3$ に置き換えることにより $c_2 = \pm 1, c_3 = \pm 1$ としてよい。 M_3 が C の接線であることより、 $m_1^2 \pm m_2^2 + c_4 m_1 m_2$ は一次式の平方となる。従って、 $c_2 = 1, c_4 = \pm 2$ であるが、 $c_4 = 2$ ならば m_2 を $-m_2$ に置き換えれば、 $c_4 = -2$ となる。 M_2 も C の接線であるから同様にして $c_3 = 1, c_5 = -2$ としてよい。さらに、 M_1 も接線であることから $c_6 = \pm 2$ であるが、 $c_6 = 2$ ならば上の二次式は $(m_1 - m_2 - m_3)^2$ に等しくなってしまうので $c_6 = -2$ である。従って、 m_i を定数倍に置き換えることにより C は

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2m_1 m_2 - 2m_2 m_3 - 2m_3 m_1$$

で表されるとしてよい。一方、定理 2 より $l = b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3$ を満たす定数 b_1, b_2, b_3 が存在する。 l で表される直線が C の接線であることから、 $b_2 b_3 + b_3 b_1 + b_1 b_2 = 0$ が成り立つ⁴。 $i \neq j$ のとき $m_i(Q_j) = 0$ であるから、 $a_i = m_i(Q_i) (\neq 0)$ とすれば、

$$\begin{aligned} a_1 l(Q_2) l(Q_3) + a_2 l(Q_3) l(Q_1) + a_3 l(Q_1) l(Q_2) \\ = a_1 a_2 a_3 (b_2 b_3 + b_3 b_1 + b_1 b_2) = 0 \end{aligned}$$

となる。この等式を $l(Q_1) l(Q_2) l(Q_3)$ で割れば、証明すべき等式が得られる。

(終)

問題 4 上の証明の中の³「 $b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3$ で表される直線が C の接線ならば、 $b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1 = 0$ が成り立つ。」を証明せよ。

定理 10 M_i, Q_i を補題 9 のそれと同じとする。さらに M_i は L_j ($1 \leq j \leq n$) と異なるとする。 Q_1, Q_2, Q_3 のうち二点を通る任意のドルポー曲線は残る一点も通る。

証明 $M_i \neq L_k$ ($i = 1, 2, 3, k = 1, \dots, n$) であるから $l_k(Q_i) \neq 0$ である。上の補題より 0 でない定数 a_1, a_2, a_3 が存在してすべての $k = 1, \dots, n$ に対して

$$\frac{a_1}{l_k(Q_1)} + \frac{a_2}{l_k(Q_2)} + \frac{a_3}{l_k(Q_3)} = 0$$

が成り立つ。定理 8 により任意のドルポー曲線は $f = \sum_{k=1}^n c_k l_1 l_2 \cdots l_n / l_k$ で表される。従って、

$$\frac{a_1 f(Q_1)}{(l_1 \cdots l_n)(Q_1)} + \frac{a_2 f(Q_2)}{(l_1 \cdots l_n)(Q_2)} + \frac{a_3 f(Q_3)}{(l_1 \cdots l_n)(Q_3)}$$

$$\begin{aligned}
&= a_1 \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{l_k(Q_1)} + a_2 \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{l_k(Q_2)} + a_3 \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{l_k(Q_3)} \\
&= \sum_{k=1}^n c_k \left(\frac{a_1}{l_k(Q_1)} + \frac{a_2}{l_k(Q_2)} + \frac{a_3}{l_k(Q_3)} \right) = 0
\end{aligned}$$

となるから $f(Q_1), f(Q_2), f(Q_3)$ のうち二つが 0 ならば、残りの一つも 0 である。p (終)

上の定理からドルボアの定理が正しいことがわかる。

定理 11 M_1, \dots, M_n を S のどの点も通らない C の相異なる接線とする。全ての交点 $M_i M_j$ ($1 \leq i < j \leq n$) を通るドルボア曲線が唯一つ存在する。

証明 M_i と M_j の交点を $Q_{i,j}$ とする。補題 7 により $Q_{1,2}, Q_{1,3}, \dots, Q_{1,n}$ を通るドルボア曲線 F が唯一つ存在する。定理 10 より $2 \leq i < j \leq n$ に対して F は $Q_{i,j}$ ($2 \leq i < j \leq n$) も通る。(終)

4 ドルボア曲線の分解

$C, L_i, P_{i,j}, S$ は前節の通りとする。この節では既約でないドルボア曲線を考えてい。接線が 3 本の場合、 S のすべての点を通る 2 次曲線が二直線に分解すれば、そのうちの一本は必ず L_1, L_2, L_3 のいずれかになることは明らかである。以後、 L_i が既約成分として含まれない場合のみ考える。

接線が 4 本の場合、ドルボア曲線が三直線に分解し、そのいずれもが L_1, L_2, L_3, L_4 と異なるのは図 7 のような場合だけである。則ち、 $P_{1,2}$ と $P_{3,4}$ を通る直線、 $P_{1,3}$ と $P_{2,4}$ を通る直線、 $P_{1,4}$ と $P_{2,3}$ を通る直線の三直線である。

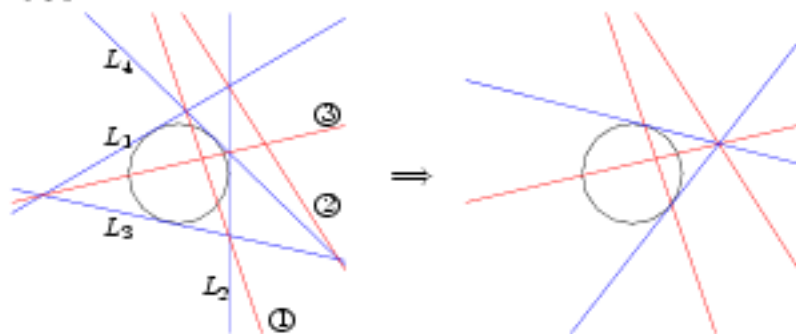


図 7: 三直線に分解

ドルボア曲線が L_1, L_2, L_3, L_4 のいずれとも異なる直線と二次曲線に分解

するのは三通りある。一つは $F_{1,2}$ と $F_{3,4}$ を通る直線と $F_{1,3}, F_{1,4}, F_{2,3}, F_{2,4}$ を通る二次曲線である。

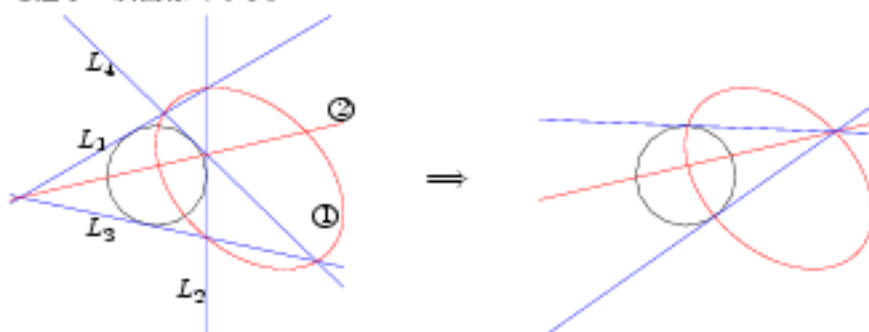


図 8: 二次曲線と直線に分解

第一節の定理 2 により 0 でない定数 a_1, a_2, a_3 が存在して $l_4 = a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3$ と書ける。また、定理 8 により $n=3$ のときの任意のドルポー曲線は 0 でない定数 c_1, c_2, c_3, c_4 により

$$c_1 l_2 l_3 l_4 + c_2 l_1 l_3 l_4 + c_3 l_1 l_2 l_4 + c_4 l_1 l_2 l_3$$

で表される。

問題 5 上の三次式が三つの一次式の積となるとするとき定数 c_1, c_2, c_3, c_4 を a_1, a_2, a_3 で表せ。

問題 6 上の三次式が一次式と (二つの一次式の積ではない) 二次式の積となるとするとき定数 c_1, c_2, c_3, c_4 を a_1, a_2, a_3 で表せ。

接線が 5 本の場合、ドルポー曲線が L_i と異なる直線を含まないことは容易にわかる。従って、ドルポー曲線が既約でなく L_i を既約成分に含まなければ、二つの二次曲線に分解する場合しかありえない。 S の中から 5 個の点をその中のどの三点も一本の接線の上にならないように選べば、その 5 点を通る二次曲線が存在する。残りの S の $10 - 5 = 5$ 個の点もその中のどの三点も L_i の上にならないから、これらの 5 点を通る二次曲線も存在する (図 9 参照)。

問題 7 $l_4 = a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3, l_5 = b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3$ とするとき、

$$c_1 l_2 l_3 l_4 l_5 + c_2 l_1 l_3 l_4 l_5 + c_3 l_1 l_2 l_4 l_5 + c_4 l_1 l_2 l_3 l_5 + c_5 l_1 l_2 l_3 l_4$$

が $F_{1,2}, F_{2,3}, F_{3,4}, F_{4,5}, F_{5,1}$ を通る二次曲線の定義式と $F_{1,3}, F_{2,4}, F_{3,5}, F_{4,1}, F_{5,2}$ を通る二次曲線の定義式の積となるように c_1, \dots, c_5 を定めよ。

接線が六本以上の場合を考察するための準備としてドルポー曲線に対して以下のようにしてグラフ (いくつかの頂点と頂点同士を結ぶ辺からなる図形)

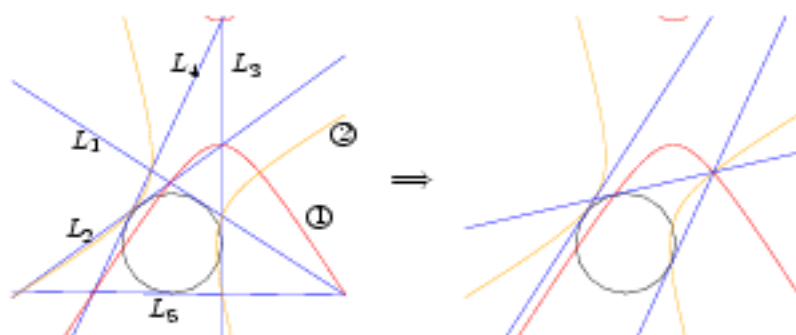


図 9: 二つの二次曲線に分解

を定義する。 C の各接線 L_i に対して頂点 v_i を対応させる。ドルポー曲線の各既約成分 E_k に対して交点 $P_{i,j}$ が E_k 上にあるとき、頂点 v_i と頂点 v_j を辺で結んでできるグラフを Γ_k とする。これらを合わせたものを分解ドルポー曲線のグラフとよぶことにし、 Γ_k をその部分グラフと呼ぶことにする。全部の部分グラフを合わせれば、完全グラフ²となることは明らかである。図 7, 図 8, 図 9 のドルポー曲線のグラフはそれぞれ図 10, 図 11, 図 12 の左となる。 E_k の次数を d_k とすれば、ベズーの定理より、接線 L_i と E_k の交点は d_k 個以下であるが、 d_k の和が $n-1$ であり、 E と L_i は丁度 $n-1$ 点で交わるから E_k と L_i も丁度 d_k 点で交わる。従って、 Γ_k の各頂点からは d_k 本の辺が出ていることになる。



図 10: 4 頂点グラフ I

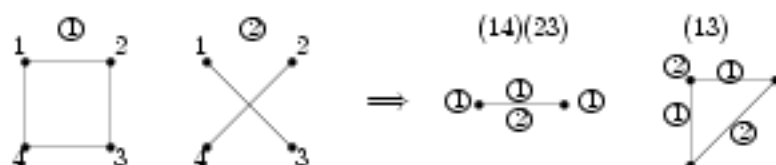


図 11: 4 頂点グラフ II

²任意の二頂点が辺で結ばれているグラフを完全グラフという



図 12: 5 頂点グラフ

ドルボーの定理により n 本の接線 L_1, L_2, \dots, L_n を交点 $P_{i,j}$ がドルボー曲線の上にあるようにしたまま連続的に動かすことができる。図 6 の右下において接線 L_1 を連続的に動かして元の L_2 に重ねると L_2, L_3, L_4 はそれぞれ元の L_3, L_4, L_1 に重なる。そこで 4 頂点グラフの頂点 v_1, v_2, v_3, v_4 をそれぞれ v_2, v_3, v_4, v_1 に移す置換を考え、これを (1234) と表すことにする。図 7 でも同じことを考えたいのであるが L_1 を連続的に動かして元の L_2 に重ねようとするとき接点 C と ① の交点の所に来たときに L_1 と L_4 が同じ直線になり、図 7 右のようにつぶれてしまう。しかしながら、複素数の世界に広げて考えると C と ① の交点を迂回して L_1 を連続的に動かして元々の L_2 に重ねることができる。

図 7 で接線 L_1 を連続的に動かしたとき交点 $P_{1,2}$ は直線 ② の上を連続的に動く。 L_2 と ② は一点でしか交わらないから L_1 を連続的に動かして元の L_2 に重ねると交点 $P_{1,2}$ は元の位置に戻ることになる。従って L_2 は元の L_1 に重なることになる。また ③ 上の交点は $P_{1,3}, P_{2,4}$ であることから、 L_1 を連続的に動かして元の L_2 に重ねると L_3 は元の L_4 に L_4 は元の L_3 に重なることがわかる。以上のことから L_1 を元の L_2 に重ねる置換は (12)(34) しかないことがわかる (記号 (12) は頂点 v_1 を v_2 に、頂点 v_2 を v_1 に移す置換を表す)。同様の考察で接線 L_1 を元の L_3, L_4 に重ねる置換はそれぞれ (13)(24), (14)(23) だけしかないことがわかる。ここで、図 10 のグラフ I は上の三つの置換で変わらないし、逆にこのグラフ I をそれ自身に移す置換は上の三つだけであることを注意しよう。例えば、頂点 v_1 と v_2 を入れ換え、 v_3, v_4 をそのままにする置換 (12) は ① を ③ に変えてしまう。

上記のようにして接線 L_i を連続的に動かして元々の L_j ($i = j$ でもよい) に重ねることによって得られるグラフの頂点の置換の集合を G_0 、各部分グラフをそれ自身に移す置換の集合を G とする。明かに $G_0 \subset G$ である。任意の接線を連続的に動かして任意の接線に重ねることができることと分解ドルボー曲線の各既約成分上の任意の S の点を同じ既約成分上の任意の S の点に移せる³ことから G_0 は次の条件を満たすことがわかる。

³ 図 9 では ① が双曲線なので $P_{1,2}$ を ② の上を連続的に動かして元の $P_{2,4}$ の位置へ移動することはできないように見えるが、複素数の世界では ① は解が二つあり $P_{1,2}$ を $P_{2,4}$ の位

(*) G_0 は分解ドルポー曲線に対するグラフの任意の頂点を任意の頂点に移す置換を含み、各部分グラフの任意の辺を同じ部分グラフの任意の辺に移すものも含む。

例えば、図 11 左のグラフを不変にする置換は

$$(12)(34), (13)(24), (14)(23), (13), (24), (1234), (1432)$$

の七つであり、図 12 左のグラフを不変にする置換は

$$(12)(35), (14)(23), (25)(34), (13)(45), (15)(24)$$

$$(12345), (13524), (14253), (15432)$$

の九つである。これらの中に、任意の頂点を任意の頂点に移すものが含まれていることは容易に確かめられる。各部分グラフの任意の辺を同じ部分グラフの任意の辺に移すものも含まれることも容易ではないが確かめられる。例えば、図 12 の部分グラフ ㉔ の頂点 v_1 と v_3 を結ぶ辺 (以後、この辺を v_1v_3 という記号で表す) を v_1v_4 に移す置換は (25)(34) である。

準備ができたので接線が六本の場合を考える。まず、分解ドルポー曲線に対する六頂点グラフとして起こり得るもの考える。ドルポー曲線の次数は 5 であるから、各既約成分の次数の可能性は

$$4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1$$

である。次数が 1 の既約成分に対する部分グラフは頂点の位置を入れ換えれば、図 13 の ㉑ のようにできるから $4+1$ の場合は図 13 の一つだけであることがわかる。同様に $3+2$ の場合は図 14 の二つ、 $3+1+1$ の場合は図 15 の一つ、 $2+2+1$ の場合は図 16, 17 の二つ、 $2+1+1+1$ の場合は図 18, 19 の二つ、 $1+1+1+1+1$ の場合は図 20 の一つである。そこで、これらのグラフが条件 (*) を満たすか考える。

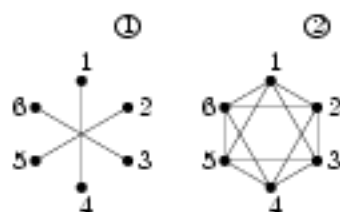


図 13: 6 頂点グラフ I

まず、次数 1 の部分グラフが二つ以上含まれる場合を考える。そのとき、頂点の位置を入れ換えれば、その二つのグラフは図 15 の ㉑, ㉒ のように位置へ移動することができる。

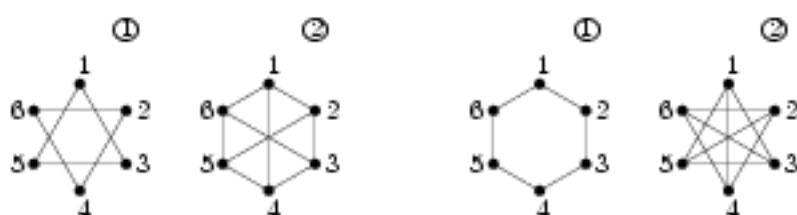


図 14: 6 頂点グラフ II(左) と III(右)



図 15: 6 頂点グラフ IV

きる。この ①, ② を変えない置換で頂点 v_1 を v_2 に移すものを考えると頂点 v_2 は v_1 に移らなければならない。 v_1 と v_6 , v_2 と v_3 が ② の辺で結ばれているから、 v_6 は v_3 に移らなければならないと考えていくことにより、頂点 v_1 を v_2 に移す置換は $(12)(36)(45)$ の一つだけであることがわかる。同様にして図 15 の ①, ② の部分グラフを保つ置換は

$$(12)(36)(45), (14)(23)(56), (16)(25)(34), (135)(246), (153)(264) \quad (1)$$

の五つだけであることがわかる。これらの置換のいずれも図 15 の部分グラフ ③ および図 20 の ③ の辺 v_1v_4 を v_2v_6 に移さないから、グラフ IV, IX は起こりえないことがわかる。

次に、図 14 右のグラフ III の部分グラフ ① が含まれる場合を考える。この部分グラフを保つ置換は (1) の五つに加え、

$$(26)(35), (13)(46), (15)(24), (123456), (14)(25)(36), (165432) \quad (2)$$

の六つである。これらの置換もやはり、図 14 右の部分グラフ ②, 図 17 の部分グラフ ③ と図 19 の部分グラフ ② の辺 v_1v_4 を v_2v_6 に移さないから、グラフ III, VI, VIII は起こりえないことがわかる。

最後に、残ったグラフ I, II, V, VII が起こりうるか考える。四本、五本の場合と違い勝手に接線を選ぶとドルポー曲線は I, V, VII には分解しない。例えば、グラフ I の場合、 L_1 と L_4 の交点 $F_{1,4}$, L_2 と L_5 の交点 $F_{2,5}$, L_3 と L_6 の交点 $F_{3,6}$ が一直線上になければならないが、勝手に選んだ大接線はこ

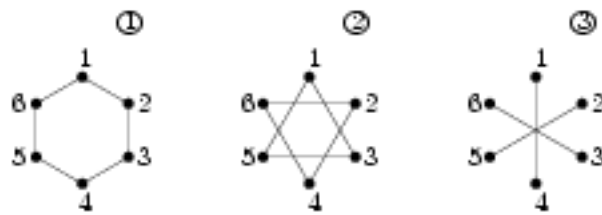


図 16: 6 頂点グラフ V

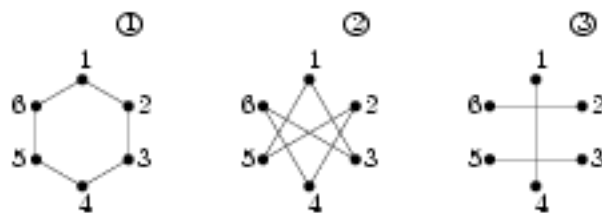


図 17: 6 頂点グラフ VI

の条件を満たさない。そこで C の任意の五本の接線 L_1, L_2, \dots, L_5 に対して $P_{1,4}$ と $P_{2,5}$ を通る直線と L_6 の交点を通り、 L_6 と異なる C の接線を L_6 とすれば $P_{1,4}, P_{2,5}, P_{3,6}$ は一直線上にある。この三点以外の $15 - 3 = 12$ 個の交点を通る既約四次曲線は存在するのでグラフ I は起こり得る (図 21 参照)。

問題 8 上の四次曲線の一つの定義式をできるだけ簡単な方法で見つけよ。

次にグラフ II について考える。 L_1, L_2, \dots, L_6 を C の相異なる任意の接線とする。 $M_1 = L_2, M_2 = L_4, M_3 = L_6$ として $n = 3$ の場合に定理 11 を適用すれば、交点 $P_{1,3}, P_{2,5}, P_{6,1}, P_{2,4}, P_{4,6}, P_{6,2}$ を通る 2 次曲線 E_1 が存在する。また、残りの $15 - 6 = 9$ 個の交点を通る三次曲線も存在する (しかも一つではない) のでグラフ II は起こり得る (図 22 参照)。

問題 9 P を六接線の上になく任意の点とすると、10 個の点 $P_{i,j}$ ($1 \leq i \leq 3, 4 \leq j \leq 6$)、 P を通る三次曲線が存在することを示せ。

問題 10 $n = rs$ が 2 以上の整数 r, s の積ならば、 n 本の接線をうまく選べば、 $r - 1$ 次曲線と $r(s - 1)$ 次曲線に分解するドルボー曲線が存在することを示せ。



図 18: 6 頂点グラフ VII

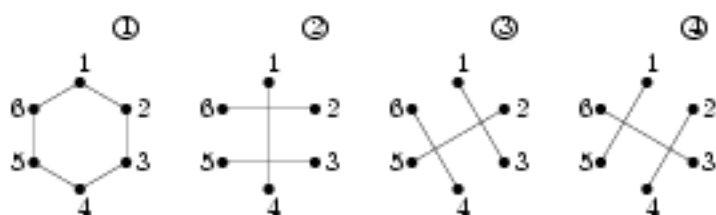


図 19: 6 頂点グラフ VIII

次にグラフ V について考える。I の場合と同様にして $P_{1,4}, F_{5,2}, F_{3,6}$ が一直線上にあるように大接線 L_1, L_2, \dots, L_8 をとれば、定理 4 により $F_{1,2}, F_{1,6}, F_{5,4}, F_{5,6}, F_{3,4}, F_{3,2}$ の六点は二次曲線上にある。また、グラフ II の場合と同様にして残りの六点を通る二次曲線も存在することもわかる。

一般の n でもグラフ V ① のようにドルポー曲線に対するグラフが n 角形となる部分グラフを含めば、その部分グラフを保つ置換は

$$(i, i+1, \dots, n, 1, 2, \dots, i-1), (i, i-1, \dots, 1, n, n-1, \dots, i+1) \quad (1 \leq i \leq n)$$

の $2n$ 個だけであるから、残りの部分グラフは自動的に決まる。即ち、 $F_{1,2}, \dots, F_{n-1,n}, F_{n,1}$ が一つの二次曲線上にあれば、 $n(n-1)/2 - n = (n-1)(n-2)/2 - 1$ であるから、他の S の点を通る $n-3$ 次曲線が存在するが、 n が奇数ならば、 $(n-3)/2$ 個の二次曲線に、 n が偶数ならば、 $(n-4)/2$ 個の二次曲線と一本の直線に分解する。

定理 12 $F_{1,2}, \dots, F_{n-1,n}, F_{n,1}$ が一つの二次曲線上にあれば、 $n/2$ 未満の任意の正整数 j に対して $F_{1,[j+j]}, \dots, F_{n,[n+j]}$ も一つの二次曲線上にある。ここで $[k]$ は k が n 以下のときは k を表し、 n より大きいときは n で割った余りを表す。さらに n が偶数ならば $F_{1,[j+n/2]}, \dots, F_{n,[n+n/2]}$ は一直線上にある。

次に、グラフ VII について考える。 $F_{1,2}, F_{3,4}, F_{5,6}$ が一直線上にあり、 $F_{2,3}, F_{4,5}, F_{6,1}$ も別の直線上にあったとする。定理 1 より残りの $15 - 6 = 9$ 個の



図 20: 6 頂点グラフ IX

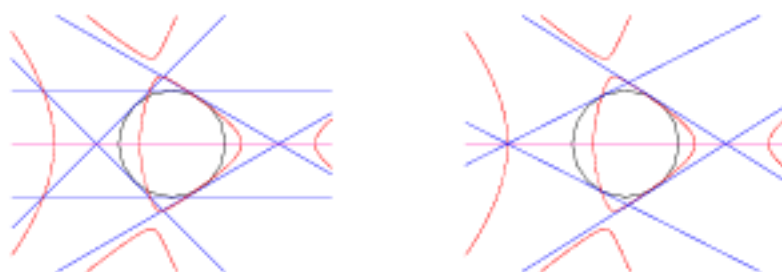


図 21: 4 次曲線と直線

交点を通る三次曲線が存在するが、分解ドルポー曲線のグラフとして起こりうるものの中で VII の ②, ③ を含むものは VII だけであるから、その三次曲線は二次曲線と直線に分解する。さらに、一般の n でも定理 12 と同様に次の定理が成り立つこともわかる。

定理 13 n は 6 以上の偶数とする。 $F_{1,2}, F_{3,4}, \dots, F_{n-1,n}$ が一直線上にあり、 $F_{2,3}, F_{4,5}, \dots, F_{n,1}$ が別の一直線上にあれば、3 以上 $n-3$ 以下の任意の奇数 k に対して $F_{1,k+1}, F_{3,k+3}, \dots, F_{n-1,k+n-1}$ も一直線上にある。2 以上 $n/2$ 未満の任意の偶数 k に対して $F_{1,k+1}, F_{2,k+2}, \dots, F_{n,k+n}$ は二次曲線上にある。さらに、 n が 4 の倍数ならば、 $F_{1,n/2+1}, F_{2,n/2+2}, \dots, F_{n/2,n}$ は一直線上にある。

問題は $F_{1,2}, F_{3,4}, \dots, F_{n-1,n}$ が一直線上にあり、 $F_{2,3}, F_{4,5}, \dots, F_{n,1}$ も別の一直線上にあるような n 本の接線が存在するかである。 $n=6$ の場合に次のように考えてみる。 ② と C の交点を Q_1 とし、 $F_{1,2}$ を Q_1 に近づけていったときの極限を考えると L_1 と L_2 は同じ直線になり Q_1 で C に接する。すると $F_{1,3}$ と $F_{2,3}$ は同じ点で ① と ③ の交点となる。 L_1 と ③ の交点は $F_{1,6}$ だけであるから、 $F_{2,3} = F_{1,6}$ となる。従って、 L_3 と L_6 は同じ直線に

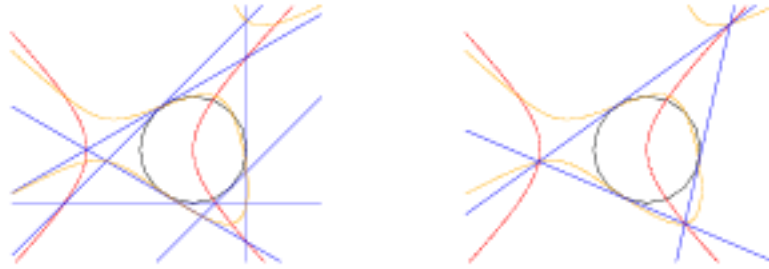


図 22: 3次曲線と2次曲線

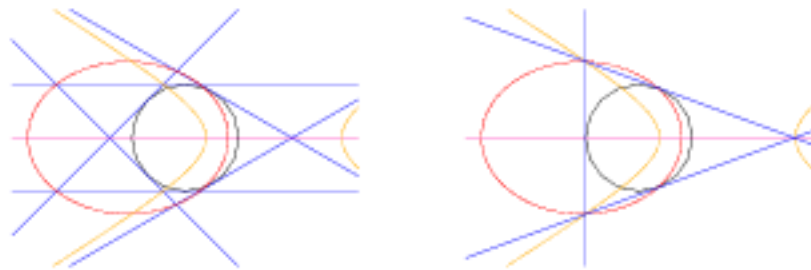


図 23: 二つの2次曲線と直線

なり、④との交点で C に接する。同様にして $P_{1,4} = P_{2,4}$ は①と④の交点であり、 $L_4 = L_6$ は③との交点で C に接する。図24右を参照せよ。即ち、②, ③, ④は C に外接する三角形の各頂点と、その対辺と C との接線を通る直線でなければならないことがわかる。逆に、この条件を満たすように三直線②, ③, ④をとると C の任意の接線 L_1 に対して L_1 と②の交点を通る L_1 と異なる C の接線を L_2 , L_2 と③の交点を通る L_2 と異なる C の接線を L_3 , L_3 と④の交点を通る L_3 と異なる C の接線を L_4, \dots とすると L_6 と L_1 の交点は③上にあることが作図により確かめられる。また、この考察の副産物として次の定理が成り立ちそうなこともわかる(実際、射影幾何の方法で証明でき、さらに M_1, M_2, M_3 が一点で交わることも証明できる)。

定理 14 K_1, K_2, K_3 を円 C の相異なる接線とし、 C との接点を Q_1, Q_2, Q_3 とする。 $\{1, 2, 3\}$ の各並べ替え $\{i, j, k\}$ に対して K_i と K_j の交点を $F_{i,j}$ とし、 $F_{i,j}$ と Q_k を通る直線を M_k とする。 M_k と C の交点で Q_k と異なる

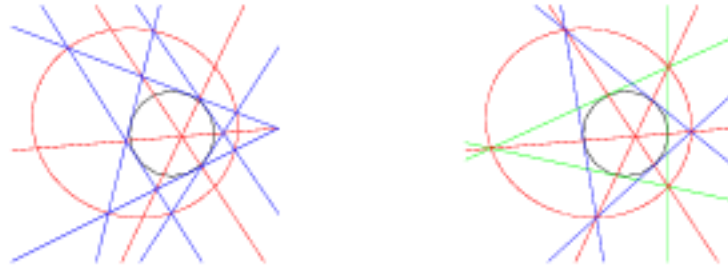


図 24: 2 次曲線と三直線

る方を R_k とし、 R_k での C の接線を N_k とする。このとき、 N_i と N_j の交点 $T_{i,j}$ は M_k 上にあり、 $F_{1,2}, F_{2,3}, F_{3,1}, T_{1,2}, T_{2,3}, T_{3,1}$ は二次曲線上にある。

問題 11 $n = 8, 10$ の場合に上と同様な考察を試みよ。

$n = 7$ の場合はドルポー曲線は各既約成分の次数が偶数であるから、既約でなければ、必ず次数 2 のものを含む。7 は素数であるから、その既約成分に対応する部分グラフは七角形になる。即ち、接線の順番をかえることにより、 $F_{1,2}, F_{2,3}, \dots, F_{7,1}$ が一つの二次曲線上にあるとしてよい。従って、定理 12 より分解ドルポー曲線のグラフは下図のものしか起こり得ない。

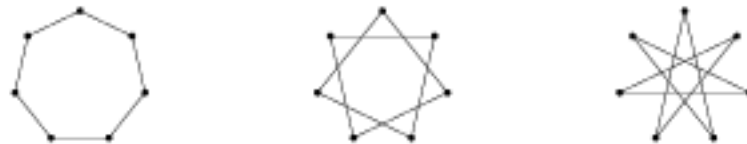


図 25: 7 頂点グラフ

$n \leq 7$ のときは、条件 (*) を満たすものはすべて分解ドルポー曲線のグラフとして起こり得たが、 $n \geq 8$ のときはそうではない。例えば、 $n = 8$ の場合に下図のグラフを考えると各部分グラフをそれぞれ自身に移す置換は

$$(12)(34)(56)(78), (13)(24)(57)(68), (14)(23)(58)(67),$$

$$(15)(26)(37)(48), (16)(25)(38)(47), (17)(28)(35)(46), (18)(27)(36)(45)$$

の七つであり、これらの置換は条件 (*) を満たす。しかしながら、このグラフは分解ドルポー曲線のグラフとはならない(問題 12)。(注: このグラフのどの二つの部分グラフを合わせても、四角形二つになる。従って、定理 13 は

適用できない。)

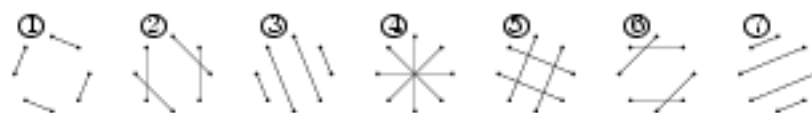


図 26: 8 頂点グラフ

問題 12 $n > 4$ のとき、分解ドルポー曲線が C の接線を含まなければ、 $n-1$ 本の直線に分解しないことを証明せよ。

図 26 において ① と ⑦ を重ねてできる次数 2 の部分グラフを ①+⑦ で表すことにする。

問題 13 ①+③, ⑤+⑦, ②, ④, ⑥ からなるグラフは分解ドルポー曲線のグラフとなりうるか。

問題 14 ①+③, ⑤+⑦, ④+⑥, ② からなるグラフは分解ドルポー曲線のグラフとなりうるか。

$n = 9$ の場合に下図のグラフが考えられる。

問題 15 図 27 の各部分グラフをそれ自身に移す置換をすべて求め、条件 (*) を満たすことを確かめよ。

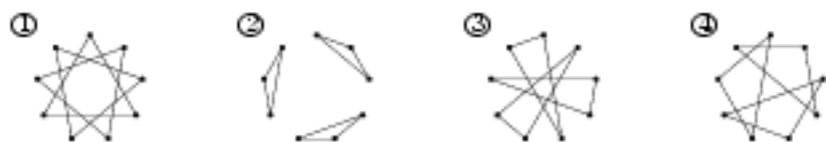


図 27: 9 頂点グラフ

このグラフに対応する分解ドルポー曲線は存在するだろうか。(注: どの部分グラフも三角形三つからなるので定理 12 は適用できない。)

また、①, ②, ③+④ および ①+②, ③+④ に対応する分解ドルポー曲線は存在するだろうか。①, ②+③+④ に対応する分解ドルポー曲線は存在する。

5 ドルポー曲線と一変数多項式

複素数 f に対して $x^2 + y^2 - 1 = 0$ で表される円の

$$\left(\frac{2f}{f^2+1}, \frac{f^2-1}{f^2+1} \right)$$

における接線を $L(t)$ で表すことにする。即ち、

$$L(t) : \left(\frac{2t}{t^2+1} \right) x + \left(\frac{t^2-1}{t^2+1} \right) y - 1 = 0$$

である。 n を 2 以上の整数とし、 $f(t)$ と $g(t)$ をそれぞれ相異なる n 個の解 s_1, s_2, \dots, s_n と t_1, t_2, \dots, t_n を持つ n 次多項式とする。定理 11 により、 $n(n-1)$ 個の交点 $L(s_i)L(s_j), L(t_i)L(t_j)$ ($1 \leq i < j \leq n$) を通る $n-1$ 次曲線が唯一つ存在する。この曲線を $D(f, g)$ で表すことにする。

定理 15 c, d を 0 でない複素数とし、 $cf(t) + dg(t) = 0$ が相異なる m 個の解 u_1, u_2, \dots, u_m を持つとする。このとき、 $m(m-1)/2$ 個の交点 $L(u_i)L(u_j)$ ($1 \leq i < j \leq m$) も $D(f, g)$ 上にある。従って、 $m = n$ ならば $D(f, g) = D(f, cf + dg) = D(cf + dg, g)$ である。

例 1 図 28 左の青の直線が $f = (t + \frac{1}{2})(t-1)$ に対する二接線であり、緑の直線が $f = t(t+1)$ に対する二接線である。右の青の直線が $f = t(t+1)(t-2)$ に対する三接線であり、緑の直線が $f = (t+5)(t+\frac{1}{2})(t-\frac{1}{2})$ に対する三接線である。左右とも空色の直線は $f + g = 0$ の実数解に対する接線である。

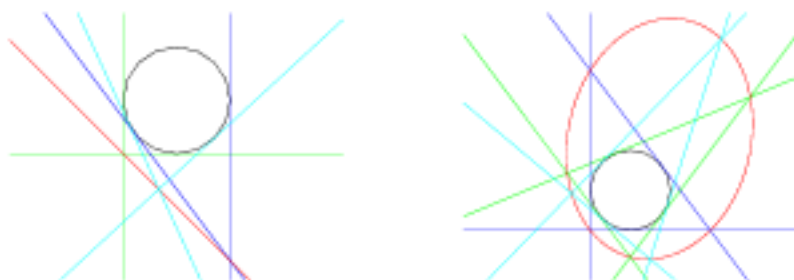


図 28: ドルポー曲線と多項式

$cf + dg = 0$ が二つ以上の重解 t_1, t_2, \dots, t_k を持つとき、 $D(f, g)$ は重解に対する接線の交点 $L(t_i)L(t_j)$ ($1 \leq i < j \leq k$) で特異点を持つ。例えば、 $f = 2t^4 + 3t^3 - 17t^2 - 27t - 9, g = 3t^4 + 8t^3 - 35t^2 - 54t - 18$ とすれば、 $2f - g = t^2(t-1)^2$ であり、 $L(0)$ と $L(1)$ の交点 $(1, -1)$ で結節点と呼ばれる特異点を持つ (図 29 左)。 $f = 4t^6 + 4t^4 - 37t^3 - 37t^2 + 9t + 9, g = 3t^6 + 6t^4 - 38t^3 - 37t^2 + 9t + 9$ とすれば、 $f - g = t^3(t-1)^2$ であり、 $(1, -1)$ でカスプと呼ばれる特異点を持つ (図 29 右)。

t の n 次多項式 f, g が重解を持つ場合も適当な複素数 c_1, d_1, c_2, d_2 に対して $c_1f + d_1g, c_2f + d_2g$ がそれぞれ相異なる n 個の解を持つようにできる。このとき、 $D(f, g) = D(c_1f + d_1g, c_2f + d_2g)$ と定義する。

$c^2f^2 - d^2g^2 = (cf - dg)(cf + dg)$ と因数分解されることに注意すれば、 $D(f^2, g^2)$ が $D(f, g)$ を含むことは容易にわかる。即ち、 $n = \deg f = \deg g$

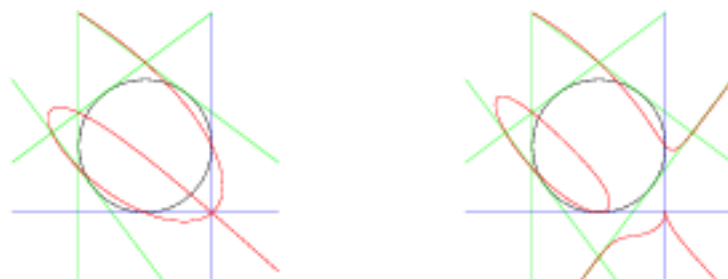


図 29: 結節点とカスプ

ならば、 $D(f^2, g^2)$ は $D(f, g)$ と n 次曲線 E の和となる。そこでこの E がどんな曲線か考えてみよう。 f, g が共に n 個の相異なる解を持つと仮定する。 $|s|$ が十分小さい時、 $f + sg = 0$ も n 個の相異なる解を持つ。その解を $t_1(s), t_2(s), \dots, t_n(s)$ とする。これらの n 個は s の連続関数としてよい。 $n(n-1)$ 個の交点 $L(t_i(s))L(t_j(s)), L(t_i(-s))L(t_j(-s))$ ($1 \leq i < j \leq n$) は $D(f, g)$ 上の点である。 $2n$ 個の複素数 $t_1(\pm s), t_2(\pm s), \dots, t_n(\pm s)$ は $f^2 - s^2g^2 = 0$ の解であるから、 n^2 個の交点 $L(t_i(s))L(t_j(-s))$ は E 上の点である。 s を 0 に近づけていったとき、 $L(t_i(s))$ と $L(t_i(-s))$ は同じ接線 $L(t_i(0))$ に近づくから、交点 $L(t_i(s))L(t_i(-s))$ は E と円 C の交点に近づく。即ち、 E は C と $L(t_i(0))$ の接点で交わる。また E 上の点 $L(t_i(s))L(t_j(-s))$ は $D(f, g)$ 上の点 $L(t_i(0))L(t_j(0))$ に近づく。即ち、 E は $D(f, g)$ と $L(t_i(0))L(t_j(0))$ で交わる。

定理 18 D を $2n$ 本の C の接線に対するドルボー曲線、 Γ を D のグラフとすれば、次の条件 (i), (ii), (iii) は同値である。

- (i) 次数 n の t の多項式 f, g が存在して $D = D(f^2, g^2)$ となる。
- (ii) 次数 n の t の多項式 f', g' が存在して D は $D(f', g')$ を含む。
- (iii) Γ の部分グラフの集合で和が次数 $n/2$ の完全グラフ二つとなるものがある。

$f^2 + g^2 = h^2$ を満たす t の m 次多項式 f, g, h で $f = 0$ と $g = 0$ が共通の解を持たないものがあれば、 m は偶数であり、 $\frac{m}{2}$ 次多項式 h_1, h_2 で $f + \sqrt{-1}g = h_1^2$, $f - \sqrt{-1}g = h_2^2$, $h = h_1h_2$ を満たすものが存在することは容易にわかる。このとき、 $D(f, g), D(f, h), D(g, h)$ は $D(h_1, h_2)$ を含む。また $D(f^2, g^2)$ は $D(f, h), D(g, h)$ を含む。

例 2 $(5t^2 - 2t + 1)^2 - (3t^2 + 2t - 1)^2 = 16t^2(t-1)^2$ であり、 $D((5t^2 - 2t + 1)^2, (3t^2 + 2t - 1)^2)$ は三直線になる。

$(t^4 + 4t^3 - 8t^2 + 2)^2 + 2t^2(t^2 - 1)^2(t - 2)^2 = (3t^4 - 4t^3 + 2)^2$ であり、 $D((t^4 + 4t^3 - 8t^2 + 2)^2, (t^2 - 1)^2(t - 2)^2)$ は三つの二次曲線と一直線からなる (図 30 参照)。

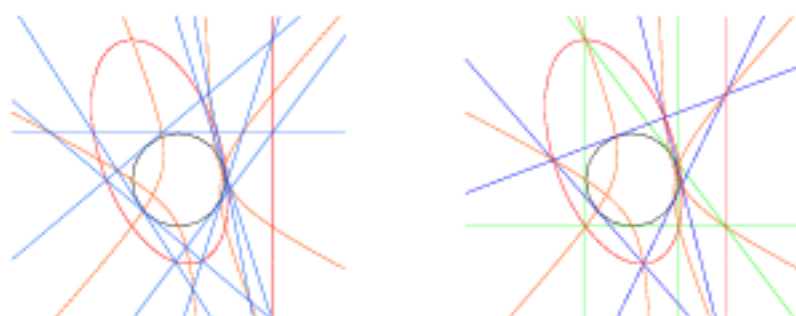


図 30: 三つの 2 次曲線と一直線

$f^2 + g^2 = h^3$ を満たす t の三次多項式 f, g と二次多項式 h が存在すれば、 $D(f^2, g^2)$ は三直線と一つの二次曲線からなる。

問題 16 上の条件を満たす実数係数の多項式 f, g, h で f, g がそれぞれ相異なる 3 個の実数解を持つものを一組作れ。

$n = 4, 5, \dots$ に対しても n 個の実数解を持つ n 次多項式 f, g と二次多項式 h で $f^2 + g^2 = h^n$ を満たすものを作り、 $D(f^2, g^2)$ がどんな曲線となるか調べてみるのも面白い。

問題 17 共通の解を持たない二次多項式 f, g と三次多項式 h で $f^3 + g^3 = h^2$ を満たすものは存在しないことを証明せよ。

第二部

ここからは群論、代数幾何学、複素関数論の初歩の知識を仮定する。[1]の第15週まで読んであれば十分である。

6 グラフに作用する群

4節では群論の知識を仮定しなかったが、群論の初歩を知っていれば、以下に述べるように分解ドルポー曲線に対するグラフの分類もすっきりと記述できる。

G_0, G を4節のそれに恒等写像(単位元)をつけ加えたものとする。 G_0, G は n 次対称群 S_n の部分群である。これらの群はグラフの頂点集合 $V_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ に推移的に作用し、各部分グラフ Γ_j の辺集合にも推移的に作用した。逆に、 V_n に推移的に作用する S_n の部分群 G に対して次のようにして V_n を頂点とするグラフ Γ_j ($j = 1, 2, \dots, k$) で G が辺集合に推移的に作用し、和が完全グラフとなるものが作れる。

Γ を V_n を頂点とする完全グラフとする。 Γ の辺を一つ選び、これを G で動かしてできる Γ の部分グラフを Γ_1 とする。 $\Gamma_1 \neq \Gamma$ ならば、 $\Gamma \setminus \Gamma_1$ の辺を一つ選び、これを G で動かしてできる部分グラフを Γ_2 とする。この操作を $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_k = \Gamma$ となるまで続ける。このようにして得られるグラフを $\Gamma(G)$ で表すことにする。 $G = S_n$ または A_n ならば $\Gamma(G)$ は完全グラフ一つからなることは明らかである。 $n = 3$ のときは V_3 に推移的に作用する S_3 の部分群は位数3の巡回群と S_3 自身だけであり、 $\Gamma(G)$ はいずれも完全グラフ一つからなる。 $n = 4$ のときは V_4 に推移的に作用する S_4 の部分群は Z^4, D_4, D_8, A_4, S_4 の五つであり、 $G \simeq D_4$ のときは $\Gamma(G)$ は図10のグラフであり、 $G \simeq Z^4, D_8$ のときは $\Gamma(G)$ は図11のグラフである。

問題 18 $n = 5, 6$ のときに V_n に推移的に作用する S_n の部分群を分類し、 $\Gamma(G)$ が第4節に表れるものしかないことを確かめよ。

G を V_n に推移的に作用する S_n の部分群とする。 $H = \{g \in G \mid gv_1 = v_1\}$ は指数 n の G の部分群である。

$$\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \{g \in G \mid gv_i = v_i \text{ for } i = 1, 2, \dots, n\} = \{1\}$$

であるから、 G がアーベル群ならば、 $H = \{1\}$ 即ち、 $|G| = n$ である。また四元数群は位数8の群であり、すべての部分群が正規部分群であるから、 G が四元数群ならば、 $n = 8$ である。 G が位数 $2r$ の二面体群 $D_{2r} = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^2 = \tau^r = 1, \tau\sigma = \sigma\tau^{-1} \rangle$ のときは $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \{1\}$ を満たす部分群 H の位数

は 1 または 2 である。以下に、 G のいくつか簡単な例を示す。

例 3 G を $\tau = (12 \cdots n)$ で生成される n 次巡回群とすれば、 n が奇数ならば、 $\Gamma(G)$ は次数 2 の部分グラフ $\frac{n-1}{2}$ 個からなり、偶数ならば、次数 2 の部分グラフ $\frac{n-2}{2}$ 個と次数 1 の部分グラフ一個からなることは容易にわかる。 $n = 4, 5, 6, 7$ のときの $\Gamma(G)$ はそれぞれ図 11, 12, 16, 25 のグラフである。

例 4 G を上の例の τ と

$$\sigma = \begin{cases} (1, n)(2, n-1) \cdots (\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}) & n \text{ は奇数} \\ (1, n)(2, n-1) \cdots (\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1) & n \text{ は偶数} \end{cases}$$

で生成される S_n の部分群とすれば、 $\tau^n = \sigma^2 = (\sigma\tau)^2 = 1$ であるから G は位数 $2n$ の二面体群である。 $\Gamma(G)$ は上の例と同じである。

例 5 n は偶数であるとし、 G を

$$\begin{aligned} \sigma &= (13 \cdots n-1)(24 \cdots n) \\ \tau &= (1, n)(2, n-1) \cdots (\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1) \end{aligned}$$

で生成される S_n の部分群とすれば、 $\tau^2 = \sigma^2 = (\sigma\tau)^2 = 1$ であるから G は位数 n の二面体群である。 $n = 4, 6$ のときの $\Gamma(G)$ はそれぞれ図 10, 18 のグラフである。

次節で、上の三つの例に対してドルポー曲線が存在することを示す。

例 6 $n = 2^k$ (k は 2 以上の整数) とし、 G を

$$\begin{aligned} g_1 &= (12)(34) \cdots (n-1, n), \\ g_2 &= (13)(24)(57)(68) \cdots (n-3, n-1)(n-2, n), \\ &\vdots \\ g_k &= (1, \frac{n}{2} + 1)(2, \frac{n}{2} + 2) \cdots (\frac{n}{2}, n) \end{aligned}$$

で生成される S_n の部分群とすれば、 $g_i^2 = 1$, $g_i g_j = g_j g_i$ であるから、 G は位数 n のアーベル群である。 $\Gamma(G)$ は次数 1 の部分グラフ $n-1$ 個からなることは容易にわかる。

問題 19 $\Gamma(G)$ が次数 1 の部分グラフ $n-1$ 個からなるならば、 G はアーベル群であり、 $n = 2^k$ であることを証明せよ。

次節で $k > 2$ ならば、上の例のようなドルポー曲線は存在しないことを示す。

例 7 $n = lm$ が 2 以上の整数 l と m の積であるとし、 $a_{i,j} = il + j + 1$ ($i = 0, 1, \dots, m-1, j = 0, 1, \dots, l-1$) として G を

$$\begin{aligned} \tau &= (a_{00} a_{01} \cdots a_{0,l-1})(a_{10} a_{11} \cdots a_{1,l-1}) \cdots (a_{m-1,0} a_{m-1,1} \cdots a_{m-1,l-1}), \\ \mu &= (a_{00} a_{10} \cdots a_{m-1,0})(a_{01} a_{11} \cdots a_{m-1,1})(a_{0,l-1} a_{1,l-1} \cdots a_{m-1,l-1}), \end{aligned}$$

$$\sigma = \begin{aligned} & (a_{0,0} a_{0,l_1-1}) \cdots (a_{0,l_1} a_{0,l_2}) \\ & (a_{1,0} a_{m-1,0}) (a_{1,1} a_{m-1,l_1-1}) \cdots (a_{1,l_1} a_{m-1,l_2}) \\ & \vdots \\ & (a_{m_1,0} a_{m_2,0}) (a_{m_1,1} a_{m_2,l_1-1}) \cdots (a_{m_1,l_1} a_{m_2,l_2}) \end{aligned}$$

で生成される群とする。ここで

$$(l_1, l_2) = \begin{cases} (\frac{l_1-1}{2}, \frac{l_2+1}{2}) & l \text{ が奇数のとき} \\ (\frac{l_1}{2} - 1, \frac{l_2}{2} + 1) & l \text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

であり、 (m_1, m_2) も同様である。 $\tau^l = \mu^m = \sigma^2 = 1, \tau\mu = \mu\tau, \tau\sigma = \sigma\tau^{-1}, \mu\sigma = \sigma\mu^{-1}$ である。 $l = m = 3$ のときの $\Gamma(G)$ は図 27 のグラフである。この G に対してもドルポー曲線が存在する。

例 8 $n = n_1 n_2$ が 2 以上の整数 n_1 と n_2 の積であるとし、 G_1 と G_2 をそれぞれ V_{n_1} と V_{n_2} に推移的に作用する S_{n_1} と S_{n_2} の部分群とし、 G を $G_1^{n_2}$ と G_2 の半直積とする。このとき、 $\Gamma(G_1)$ の各部分グラフ Γ_1 に対して $\Gamma_1 n_2$ 個からなる部分グラフを $\Gamma(G)$ は含む。また Γ_2 が次数 k の $\Gamma(G_2)$ の部分グラフならば、次数 $n_1 k$ の部分グラフを $\Gamma(G)$ は含む (図 31 参照)。 G_1 と G_2 に対してドルポー曲線が存在するならば、 G に対してもドルポー曲線が存在することを次説で示す。

部分グラフ毎に色を変えて一つに表示している

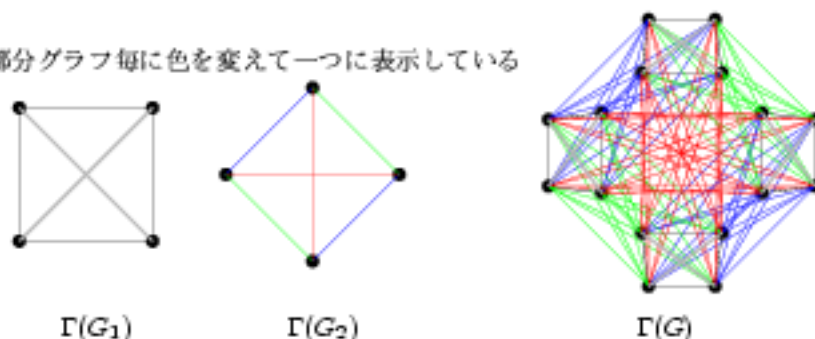


図 31: G が半直積のときのグラフ

上の三つの例から n が素数でなければ、 $\Gamma(G)$ として多くの可能性があることがわかる。では n が素数のときはどうだろうか。

問題 20 n が素数ならば、 $\Gamma(G)$ の各部分グラフは連結⁴であることを証明せよ。

⁴グラフが連結とは任意の頂点から辺を辿って任意の頂点へたどり着けるグラフのことである。例えば図 13 の $\textcircled{2}$ は連結であるが、 $\textcircled{3}$ は連結ではない。

$\Gamma(G)$ の部分グラフの一つが次数 2 の連結グラフ (即ち、 n 角形) ならば、 G は位数 n の巡回群であるか位数 $2n$ の二面体群であることは容易にわかる。 n が奇数ならば、 $\Gamma(G)$ の各部分グラフの次数は偶数である。従って、 $n=5$ または 7 で、 $\Gamma(G)$ が完全グラフ一つからなるのでなければ、次数 2 の部分グラフ二つまたは三つからなる。

例 9 $n=7$ とし、 $\tau = (1, 2, \dots, 7)$, $\sigma = (2, 3, 5)(4, 7, 6)$ とすれば、 $\tau^7 = \sigma^3 = 1$, $\tau\sigma = \sigma\tau^2$ であるから、 τ と σ で生成される群 G は位数 21 であり、二面体群、 n 次交代群、 n 次対称群のいずれとも異なるが、 $\Gamma(G)$ は完全グラフ一つからなる。

問題 21 n が 11 以上の素数のとき、 $\Gamma(G)$ が完全グラフひとつだけからなるものと $\frac{n-1}{2}$ 個の次数 2 の部分グラフからなるもの以外にあるだろうか。

7 射影直線からそれ自身の上への正則写像

以下で射影直線 (複素平面に無限遠点 ∞ をつけ加えたもの) を P^1 で表す。5 節と同じように C は $x^2 + y^2 - 1 = 0$ で表される円 (ただし複素数で考える) とし、 P^1 の点 t に対して $(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1})$ での C の接線を $L(t)$ で表す。ただし、 $t = \infty$ の場合も考えることにし、 $L(\infty)$ は $(0, 1)$ における接線とする。 D を n 本の C の接線に対するドルポー曲線とする。 P^1 の任意の点 t_1 に対して、ドルポーの定理により P^1 の $n-1$ 個の点 t_2, \dots, t_n が存在して交点 $L(t_i)L(t_j)$ ($1 \leq i < j \leq n$) が D 上にある。これらの点 t_1, t_2, \dots, t_n により、 $(P^1)^n/S_n \simeq P^n$ 上の点

$$(t_1 + t_2 + \dots + t_n, t_1 t_2 + t_1 t_3 + \dots + t_{n-1} t_n, \dots, t_1 t_2 \dots t_n)$$

が定まるから、 P^1 から P^n への n 対 1 の正則写像が定まる。この写像を $\phi_D: P^1 \rightarrow P^n$ で表す。

定理 17 $\phi_D(P^1)$ は P^n の直線である。

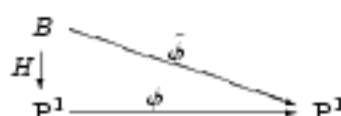
上の定理により、ドルポー曲線に対して P^1 から $P^1 \simeq \phi_D(P^1)$ の上への正則写像が定まるが、逆に、 P^1 からそれ自身の上への次数 n の正則写像 $\phi: P^1 \rightarrow P^1$ から、次のようにしてドルポー曲線が定まる。 s_0 と t_0 を ϕ による逆像が n 個の点からなる P^1 の点とする。 $\phi^{-1}(s_0) = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, $\phi^{-1}(t_0) = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ とし、 $f(t) = (t - s_1)(t - s_2) \dots (t - s_n)$, $g(t) = (t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_n)$ とすれば、 P^1 の非斉次座標を s_0, t_0 でそれぞれ $0, \infty$ となるようにとることにより ϕ は有理関数 f/g で表せる。定理 11 により、 $L(s_i)L(s_j)$, $L(t_i)L(t_j)$ ($1 \leq i < j \leq n$) を通る $n-1$ 次曲線 D が存

在する。 P^1 の点 $u \neq \infty$ に対して $\phi^{-1}(u)$ は $f - ug = 0$ の解からなる。ただし、 $u = 1$ のときは $f - g$ が t の $n - d$ 次式ならば、 $f - g = 0$ は ∞ を d 重根に持つと考える。 $\frac{1}{1-u}(\phi_D(s_1) - u\phi_D(t_1))$ は上の定理により、 $\phi_D(P^1)$ 上にあり、

$$\begin{aligned} f - ug &= (1-u)t^n - ((s_1 + s_2 + \cdots + s_n) - u(t_1 + t_2 + \cdots + t_n))t^{n-1} \\ &\quad + ((s_1s_2 + \cdots + s_{n-1}s_n) - u(t_1t_2 + \cdots + t_{n-1}t_n))t^{n-2} \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + (-1)^n (s_1s_2 \cdots s_{n-1} - ut_1t_2 \cdots t_n) \end{aligned}$$

であるから、 $\phi_D^{-1}(\frac{1}{1-u}(\phi_D(s_1) - u\phi_D(t_1))) = \phi^{-1}(u)$ である。また、 $\phi^{-1}(u) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ とするとき、定理 15 により $L(u_i)L(u_j)$ ($1 \leq i < j \leq n$) は D 上にある。従って、 D は s_0, t_0 の選び方によらない。

P^1 からそれ自身の上への正則写像 $\phi: P^1 \rightarrow P^1$ に対して上のようにして定まるドルポー曲線を $D(\phi)$ で表すことにする。前述したように、 ϕ が二つの n 次多項式 f, g の比 f/g で表されているならば、 $D(\phi) = D(f, g)$ (5 節の記号) である。 ϕ のガロア閉包を $\tilde{\phi}: B \rightarrow P^1$ とし、 $\tilde{\phi}$ のガロア群を G とすれば、 $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \{1\}$ を満たす G の部分群 H が存在し、射影 $B \rightarrow P^1$ は H による商写像に一致する。



また、 $\Gamma(G)$ はドルポー曲線 $D(\phi)$ に対するグラフに一致する。

G がアーベル群または四元数群のときは $H = \{1\}$ であるから、 ϕ はガロア被覆である。 P^1 から P^1 の上へのガロア被覆は完全に分類されていて、その中にガロア群が四元数群であるものはなく、アーベル群であるものは巡回群と D_4 だけである。従って、前節の例 6 に対するドルポー曲線は $k > 2$ のときには存在しないことがわかる。また、ガロア群が二面体群である P^1 から P^1 の上へのガロア被覆が存在するから、例 5 に対するドルポー曲線は存在する。さらに、 H を二面体群の位数 2 の部分群とし、 ϕ から導かれる正則写像 $P^1/H \rightarrow P^1$ を考えれば、例 4 に対するドルポー曲線も存在することがわかる。

例 10 $\phi_1: B_1 \rightarrow P^1$ を四点で分岐する二重被覆とすれば、よく知られているように B_1 は楕円曲線である。従って、任意の 2 以上の整数 n に対して位数 n の巡回不分岐被覆 $\phi_2: B \rightarrow B_1$ が存在する。このとき、合成写像 $\phi_1 \circ \phi_2: B \rightarrow P^1$ はガロア被覆であり、ガロア群 G は Z_n と Z_2 の半直積、即ち、位数 $2n$ の二面体群である。 G は位数 2 で固定点を持つ元 g を含む。 $B/\langle g \rangle$ は有理曲線であるから、 $G \simeq D_{2n}$ となる次数 n の P^1 からそれ自身の上への写像が得られる。

問題 22 $G \simeq D_{2n}$ ならば、 B は P^1 または 楕円曲線であることを示せ。

例 11 $\phi_1: B_1 \rightarrow P^1$ は例 10 と同じとし、 $n = lm$ は 2 以上の整数 l と m の積であるとする。 $\pi_1(B_1) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ であるからガロア群が $\mathbb{Z}_l \oplus \mathbb{Z}_m$ となる不岐ガロア被覆 $\phi_2: B \rightarrow B_1$ が存在する。このとき、合成写像 $\phi_1 \circ \phi_2: B \rightarrow P^1$ はガロア被覆であり、ガロア群 G は例 7 の群 G に同型になる。例 10 と同様に G は位数 2 で固定点を持つ元 g を含み、 $B/\langle g \rangle$ は有理曲線となる。従って、 $l = m = 3$ の場合を考えれば、図 27 のグラフを持つドルポー曲線が存在することがわかる。

次に、正則写像 ϕ が二つの正則写像 $\phi_1: P^1 \rightarrow C_1, \phi_2: C_1 \rightarrow P^1$ の合成写像 $\phi_2 \circ \phi_1$ になる場合を考えてみよう。 C_1 は有理曲線であるから、 ϕ_1 からドルポー曲線 $D(\phi_1)$ が得られるが、これが $D(\phi)$ に含まれることは明らかであろう。 $n_i = \deg(\phi_i)$ とすれば、 $n = n_1 n_2$ である。 ϕ_i のガロア閉包のガロア群を G_i とすれば、 G_2 は $G_1^{n_2}$ に作用し、 G は $G_1^{n_2}$ の G_2 -不変な部分群 \tilde{G}_1 と G_2 の半直積となる。 ϕ_1 と ϕ_2 が特別な関係になれば、 $\tilde{G}_1 = G_1^{n_2}$ であり、 $\Gamma(G)$ は例 8 のようになる。特に、 $\Gamma(G_1)$ の各部分グラフ Γ_1 に対して Γ_1 のコピー n_2 個からなるグラフを $\Gamma(G)$ は部分グラフとして含む。

例 12 f と g を n 次多項式とし、 f/g で表される正則写像を $\phi_1, \phi_2(f) = f'$ とすれば、 $D(f', g') = D(\phi_2 \circ \phi_1)$ である。

逆に、 P^1 からそれ自身の上への正則写像 ϕ のガロア閉包のガロア群 G に対して $\Gamma(G)$ の部分グラフの一つが n_2 個の連結成分からなれば、 n_2 は n の約数であり、 ϕ が次数 n/n_2 と n_2 の二つの正則写像の合成写像となることもわかる。

問題 23 n が素数のとき、 G が巡回群、二面体群、交代群、対称群以外の群になることがあるか。

$\phi: X \rightarrow P^1$ をリーマン面 X から P^1 の上への次数 n の正則写像とし、 $B_\phi = \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ を ϕ の分岐点集合とする。即ち、 $\#\phi^{-1}(p_i) < n$ であり、 $p \notin B_\phi$ ならば $\#\phi^{-1}(p) = n$ である。 $s = \#B_\phi = 2$ ならば ϕ は巡回被覆でしかありえないので、以下 $s > 2$ と仮定する。 $\phi^{-1}(p_i) = \{q_{i,1}, q_{i,2}, \dots, q_{i,k_i}\}$ とし、 $U_{i,j}$ を $q_{i,j}$ の十分小さい近傍としたとき、 $d_{i,j} = \deg \phi|_{U_{i,j}}$ とすれば、 $\phi|_{U_{i,j}}$ は位数 $d_{i,j}$ の巡回被覆であり、 $\sum_{j=1}^{k_i} d_{i,j} = n$ である。また Riemann-Hurwitz の公式より $\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{k_i} d_{i,j} - 1 = 2n + 2g(X) - 2$ である。従って、 $s \leq 2n + 2g(X) - 2$ である。また ϕ がガロア被覆ならば、すべての i に対して $d_{i,1} = d_{i,2} = \dots = d_{i,k_i}$ である。次に、 B_ϕ の全ての点を通る閉曲線 θ を考え、 $\Theta = \phi^{-1}(\theta)$ とする。 Θ は点 $q_{i,j}$ から $2d_{i,j}$ 本の辺が出ているグラフ

になる (図 32-37 参照)。 $P^1 \setminus \theta$ は二つの連結成分に分かれる。これを D^+ と D^- とする。 ϕ の $X \setminus \theta$ への制限は不分岐であり、 D^+ は単連結であるから、 $\phi^{-1}(D^+)$ は n 個の連結成分に分かれる。これを $D_1^+, D_2^+, \dots, D_n^+$ とする。 $\phi^{-1}(D^-)$ も n 個の連結成分に分かれるが、 D_k^+ と辺 e_1 で接しているものを D_k^- とする。 ϕ の分岐点 p_1, p_2, \dots, p_r が θ 上にこの順に並んでいるとし、 p_{i-1} と p_i を結ぶ θ の辺を e_i とする。 D_j^+ から出発して e_i, e_{i+1} と続けて横切って D_k^+ に到達したとするとときに j を k に移す S_n の元を g_i とし、 g_1, g_2, \dots, g_r で生成される群を G とする。 $g_1 g_2 \cdots g_r = 1$ となることは容易にわかる。また g_i の位数は $d_{i,1}, d_{i,2}, \dots, d_{i,k_i}$ の最小公倍数に等しいこともわかる。以下の図 32 から 36 では辺 e_1, e_2, e_3, e_4 をそれぞれ黒、赤、青、緑色で表している。図 32 および 33 において黒、青と横切ると (123) という置換を引き起こし、赤、青と横切ると (12) という置換を引き起こす。また、図 33 において青、緑と横切ると (23) という置換を引き起こす。従って、いずれの場合も $G = S_3$ である。図 34 において黒、赤と横切ると $(14)(23)$ という置換を引き起こし、赤、青と横切ると $(13)(24)$ という置換を引き起こす。従って、 $G \simeq D_4$ であり、この場合 ϕ はガロア被覆である。また、図 35 において青、緑と横切ると (12) という置換を引き起こすので $G \simeq D_2$ である。

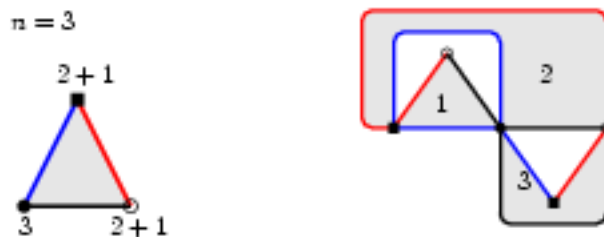


図 32: リーマン面上のグラフ



図 33: リーマン面上のグラフ II

定理 18 上記の群 G は ϕ のガロア閉包のガロア群に同型である。

以下で ϕ のガロア閉包 $\bar{\phi}: \bar{X} \rightarrow P^1$ を具体的に構成する。 D_g^+, D_g^- ($g \in G$) をそれぞれ D^+, D^- のコピーとする。 $g = h g_1 g_2 \cdots g_{r-1}$ のとき D_g^+ と D_k^- を e_i で張り合わせてできるリーマン面を \bar{X} とし、 $P^1 = D^+ \cup D^- \cup \theta$ への自然な射影を $\bar{\phi}: \bar{X} \rightarrow P^1$ とする。このとき D_g^+ から出発して e_i, e_{i+1} と横切る

と D_{∞}^+ に到達する。従って、 p_i の回りには $D_g^+, D_{gg}^+, \dots, D_{g^{i-1}}^+$ が集まっている。また $\alpha D_g^\pm = D_{gg}^\pm$ により、 G が \bar{X} に左から作用する。さらに $1g = i$ のとき $f(D_g^\pm) = D_i^\pm$ を満たす正則写像 $f: \bar{X} \rightarrow X$ が存在する。この写像は G の部分群 $H = \{g \in G \mid 1g = 1\}$ による商写像であり、 $\bar{\phi} = \phi \circ f$ である。また f の $g_{i,j}$ での分岐次数は $|g_i|/d_{i,j}$ であり、 $|g_i| = \text{l.c.m.}(d_{i,1}, d_{i,2}, \dots, d_{i,k_i})$ であるからすべての i について $d_{i,1} = d_{i,2} = \dots = d_{i,k_i}$ ならば f は不分岐写像である。従って、さらに $X \simeq \mathbb{P}^1$ のときは f は同型写像となる。即ち、 ϕ はガロア被覆である。

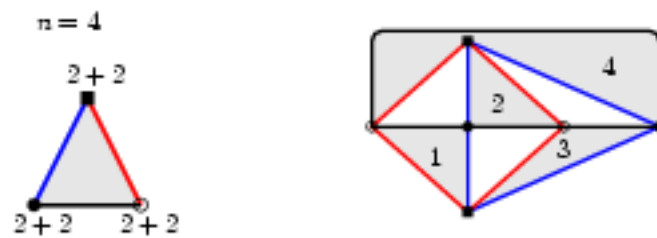


図 34: リーマン面上のグラフ III

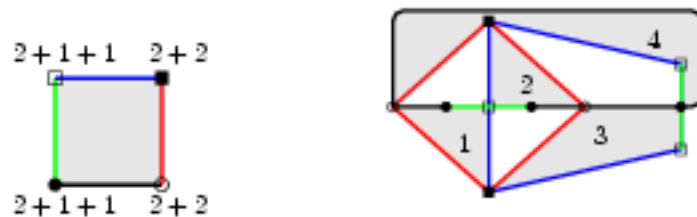


図 35: リーマン面上のグラフ IV

問題 24 $G \subset A_n$ となるための必要十分条件を求めよ。

問題 25 $n = 4, s = 3, k_i = 2 (i = 1, 2, 3), d_{i,1} = d_{i,2} = 2 (i = 1, 2), d_{3,1} = 3, d_{3,2} = 1$ となる正則写像 $\phi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ は存在しないことを示せ。

図 36 に対する正則写像の $\Gamma(G)$ は問題 13 のものになる。

図 37 に対する正則写像の $\Gamma(G)$ は図 27 のものになる。

問題 26 $\Gamma(G)$ が図 13 のグラフ I となる正則写像 $\phi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ に対する Θ を一つ見付けよ。

問題 27 $\Gamma(G)$ が図 14 のグラフ II となる正則写像 $\phi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ に対する Θ を一つ見付けよ。

問題 28 ガロア閉包のガロア群が例 9 の群に同型となる正則写像 $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ を一つ見付けよ。

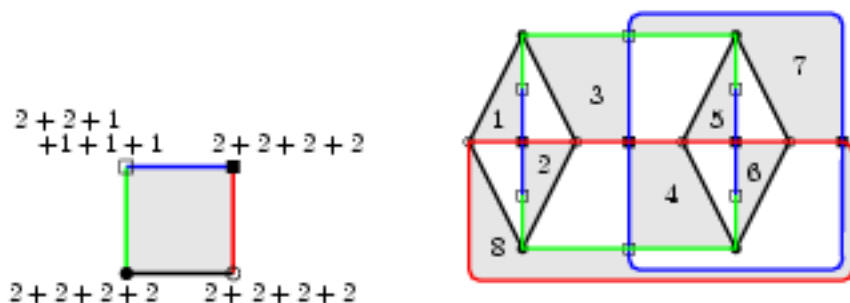


図 36: リーマン面上のグラフ VI

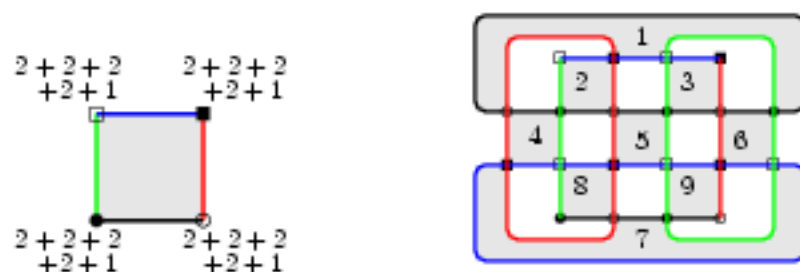


図 37: リーマン面上のグラフ VII

ガロア閉包のガロア群が問題 21 の群に同型となる正則写像 $P^1 \rightarrow P^1$ が存在するだろうか。

8 問題のヒントと解答

ヒント その一

問題 1 F_1, F_2 を通る直線の定義式を l_1, F_3, F_4 を通る直線の定義式を l_2 とすれば、 $l_1 l_2$ の表す二直線は F_1, F_2, F_3, F_4 を通る。

問題 4 $b_3 = 0$ とすると $b_1 m_1 + b_2 m_2$ で表される直線が C の接線ならば、 $b_1 = 0$ または $b_2 = 0$ であるから、 $b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1 = 0$ が成り立つ。そこで $b_3 \neq 0$ の場合を考える。

$$m_3 = -\frac{b_1}{b_3} m_2 - \frac{b_2}{b_3} m_1$$

を $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2m_1 m_2 - 2m_2 m_3 - 2m_3 m_1$ に代入していつ一次式の二乗になるか。

問題 5 三つの一次式で表される直線は $F_{1,2}$ と $F_{3,4}$ を通る直線、 $F_{1,3}$ と $F_{2,4}$ を通る直線、 $F_{1,4}$ と $F_{2,3}$ を通る直線である。

問題 7 二つの二次曲線の定義式を求め、掛けてみよ。

問題 8 L_i の定義式を l_i としたとき、これらの一次式を使って 12 個の交点で 0 となる四次式を作ればよい。

問題 13 真上から時計回りに頂点に番号を付けると ②, ④, ⑥ は偶数番目同士、奇数番目同士を結んでいる。 M_1, M_3, M_5, M_7 を C の相異なる C の接線とし、 M_1M_3 と M_5M_7 を通る直線を E_1 、 M_1M_5 と M_3M_7 を通る直線を E_2 、 M_1M_7 と M_3M_5 を通る直線を E_3 とし、 M_2 を M_1, M_3, M_5, M_7 と異なる C の接線とすれば、ドルボアの定理により、 C の接線 M_4, M_6, M_8 で交点 M_2M_4, M_6M_8 が E_1 上に、 M_2M_6, M_4M_8 が E_2 上に、 M_2M_8, M_4M_6 が E_3 上にあるものが存在する。16 個の交点 M_iM_j ($i = 1, 3, 5, 7, j = 2, 4, 6, 8$) を通る四次曲線は存在するが、これが二つの二次曲線に分解するようにしたい。

問題 14 M_1, M_3, M_5, M_7, E_1 を上の問題 13 のそれと同じとし、 $M_1M_5, M_3M_7, M_1M_7, M_3M_5$ を通る二次曲線の一つを F_2 とする。 M_2 を M_1, M_3, M_5, M_7 と異なる C の接線とすれば、ドルボアの定理により、 C の接線 M_4, M_6, M_8 で交点 M_2M_4, M_6M_8 が E_1 上に、 $M_2M_6, M_4M_8, M_2M_8, M_4M_6$ が F_2 上にあるものが存在する。以下、問題 13 と同じ。

問題 16 $f^2 + g^2 = (f + \sqrt{-1}g)(f - \sqrt{-1}g)$ だから、 h_1, h_2 を一次多項式とし、 $h = h_1h_2, f = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2), g = \frac{\sqrt{-1}}{2}(h_1^2 - h_2^2)$ とすれば $f^2 + g^2 = h^2$ を満たす。そこで、 f, g が実数係数で相異なる 3 個の実数解を持つように工夫せよ。

問題 17 $\rho = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ とすれば、 $\rho^3 = 1$ であるから、

$$f^3 + g^3 = (f + g)(f + \rho g)(f + \rho^2 g)$$

が成り立つ。

問題 19 G の単位元以外の全ての元の位数が 2 であることを示せ。

問題 20 $\Gamma(G)$ の部分グラフ Γ_0 の連結成分を $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ とするとき、これらの成分に含まれる頂点の個数が同じであることを示せ。

問題 21 $\tau = (1, 2, \dots, 13), \sigma = (2, 4, 10)(3, 7, 6)(5, 13, 11)(8, 9, 12)$ で生成される S_{13} の部分群を考えてみよ。

ヒント その二

問題 1 F_1, F_2, F_3, F_4 を通る二次曲線を二つ求め、その定義式を f, g とするとき、 $cf + dg$ の表す二次曲線が F_5 を通るように定数 c, d を定めればよい。

問題 5 $F_{1,2}$ を通る直線の定義式は定数 b_1, b_2 により $b_1l_1 + b_2l_2$ と書けるが、これが $F_{3,4}$ を通るように定数 b_1, b_2 を定める。同様にして $F_{1,3}$ と $F_{2,4}$ を通る直線、 $F_{1,4}$ と $F_{2,3}$ を通る直線の定義式を求め、この三つの一次式を掛けてみよ。

問題 6 $F_{1,2}, F_{3,4}$ を通る直線の定義式と $F_{1,3}, F_{1,4}, F_{2,3}, F_{2,4}$ を通る二次曲線の定義式を掛けてみよ。

問題 7 $\sum_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3} d_{ij} l_i l_j$ で表される二次曲線が 5 点 $F_{1,2}, F_{2,3}, F_{3,4}, F_{4,5}, F_{5,1}$ を通るように係数 d_{ij} を定めよ。例えば、 $l_1(F_{1,2}) = l_2(F_{1,2}) = 0, l_3(F_{1,2}) \neq 0$ であるから $d_{3,3} = 0$ である。同様に 5 点 $F_{1,3}, F_{2,4}, F_{3,5}, F_{4,1}, F_{5,2}$ を通る二次曲線の定義式を求め、二つの二次式を掛けてみよ。

問題 16 h_1, h_2 を係数が互いに共役な複素数の一次多項式とすればよい。

問題 17 $f + g = \bar{h}_1, f + \rho g = \bar{h}_2, f + \rho^2 g = \bar{h}_3$ とする。

問題 19 G の単位元ではない元 g が頂点 v_i を頂点 v_j に移すならば、同じ g により v_j は v_i に移されることを示せば $g^2 = 1$ であることがわかる。

解答

問題 1 F_1, F_2 を通る直線の定義式を l_1, F_3, F_4 を通る直線の定義式を l_2, F_1, F_3 を通る直線の定義式を l_3, F_2, F_4 を通る直線の定義式を l_4 とする。 $c = l_3(F_5)l_4(F_5), d = -l_1(F_5)l_2(F_5)$ とすれば、 $f = cl_1l_2 + dl_3l_4$ の表す二次曲線は F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 を通る。

問題 2 直線 N_1 上に $L_1M_1, L_2M_2, \dots, L_nM_n$ と異なる点 P をとり、

$$(m_1m_2 \cdots m_n)(P)l_1l_2 \cdots l_n - (l_1l_2 \cdots l_n)(P)m_1m_2 \cdots m_n$$

で表される n 次曲線 E を考えれば E は N_1 と $n+1$ 点を共有するから、 E は直線 N_1 と $n-1$ 次曲線 E_2 の和となる。 E_2 と N_2 は n 点を共有するから、 E_2 は N_2 と $n-2$ 次曲線 E_3 の和となる。

問題 3 L_i, M_j の定義式 l_i, m_j は以下の通り。

$$l_1 = 2x - y + 1, l_2 = x - y - 1, l_3 = 4x + 3y,$$

$$m_1 = x - 3y - 1, m_2 = 3x + y + 1, m_3 = 3x + y - 1$$

$(l_1l_2l_3)(-1, 0) = -8, (m_1m_2m_3)(-1, 0) = -16$ だから $f = 2l_1l_2l_3 - m_1m_2m_3$ は二次式と一次式の積になるはずであるが、実際 $f = (x^2 + y^2 - 1)(7x + 9y + 1)$ となる。

問題 4 ヒントその一を実行すると

$$(b_1 + b_2)^2 m_1^2 + 2(b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1 - b_3^2)m_1m_2 + (b_2 + b_3)^2 m_2^2$$

となる。これを m_1 を変数とする二次式とみなして判別式を計算すると $-16b_3^2(b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1)$ となる。

問題 5 $F_{1,2}$ を通る直線は定数 b_1, b_2 により $b_1l_1 + b_2l_2$ で表されるが、これが $F_{3,4}$ を通るならば、 $b_1l_1 + b_2l_2 = c_3l_3 + c_4(a_1l_1 + a_2l_2 + a_3l_3)$ を満たす定数 c_3, c_4 が存在するはずである。 $b_1 = a_1, b_2 = a_2, c_3 = -a_3, c_4 = 1$ とすれば、上の等式は成り立つから、 $a_1l_1 + a_2l_2$ で表される直線は $F_{1,2}$ と $F_{3,4}$

を通る。同様に、 $F_{1,3}$ と $F_{2,4}$ を通る直線、 $F_{1,4}$ と $F_{2,3}$ を通る直線はそれぞれ $a_1l_1 + a_3l_3$, $a_2l_2 + a_3l_3$ で表される。

$$(a_1l_1 + a_2l_2)(a_1l_1 + a_3l_3)(a_2l_2 + a_3l_3) =$$

$$(a_2a_3l_2l_3 + a_1a_3l_1l_3 + a_1a_2l_1l_2)(a_1l_1 + a_2l_2 + a_3l_3) - a_1a_2a_3l_1l_2l_3$$

であるから、 $c_1 = a_2a_3$, $c_2 = a_1a_3$, $c_3 = a_1a_2$, $c_4 = -a_1a_2a_3$ とすればよい。

問題 6 $F_{1,3}$, $F_{1,4}$, $F_{2,3}$, $F_{2,4}$ を通る二次曲線は定数 c, d により $cl_1l_2 + dl_3(a_1l_1 + a_2l_2 + a_3l_3)$ で表される。ただし $a_3c = a_1a_2d$ が成り立つときは二直線になる。

$$(a_1l_1 + a_2l_2)(cl_1l_2 + dl_3(a_1l_1 + a_2l_2 + a_3l_3)) =$$

$$(a_2dl_2l_3 + a_1dl_1l_3 + cl_1l_2)(a_1l_1 + a_2l_2 + a_3l_3) - a_3cl_1l_2l_3$$

であるから、 c を $a_3c \neq a_1a_2d$ を満たす定数とし、 $c_1 = a_2d$, $c_2 = a_1d$, $c_3 = c$, $c_4 = -a_3c$ とすればよい。

問題 7 二つの二次曲線は次の多項式で表される。

$$f = a_1b_2l_1l_2 + a_2b_3l_2l_3 + (a_1b_3 - a_2b_1)l_1l_3 + a_2b_2l_3^2,$$

$$g = a_1b_2l_1l_2 + a_2b_3l_2l_3 + (a_1b_3 + a_2b_1)l_1l_3 + a_1b_1l_1^2 + a_3b_3l_3^2$$

$$fg \equiv a_2b_3l_2l_3l_4l_6 + (a_1b_3 - a_2b_1)l_1l_3l_4l_6 + a_1b_2l_1l_2l_4l_6 \\ + a_3(a_2b_1 - a_1b_2)l_1l_2l_3l_6 + b_1(a_3b_2 - a_2b_3)l_1l_2l_3l_4$$

であるから $c_1 = a_2b_3$, $c_2 = a_1b_3 - a_2b_1$, $c_3 = a_1b_2$, $c_4 = a_3(a_2b_1 - a_1b_2)$, $c_5 = b_1(a_3b_2 - a_2b_3)$ とすればよい。

問題 8 c_1, c_2, c_3 を定数として

$$c_1l_1l_2l_3l_4 + c_2l_1l_2l_5l_6 + c_3l_3l_4l_5l_6$$

とすればよい。

問題 9 定数 c, d を $cl_1l_2l_3 + dl_4l_5l_6$ が P で 0 になるように定めればよい。

問題 10 L_1, L_2, \dots, L_r を C の相異なる接線とし、 E_1 を $r(r-1)/2$ 個の交点 L_iL_j を通る既約 $r-1$ 次曲線とする。ドルボアの定理により C の相異なる rs 本の接線 $L_{i,k}$ ($1 \leq i \leq s, 1 \leq k \leq r$) で $sr(r-1)/2$ 個の交点 $L_{i,k}L_{i,l}$ ($1 \leq i \leq s, 1 \leq k < l \leq r$) がすべて E_1 上にあるものがある。 $L_{i,k}$ の定義式を $l_{i,k}$ とし、 $f_i = l_{i,1}l_{i,2} \cdots l_{i,r}$ とする。 c_1, c_2, \dots, c_s を 0 でない定数とすれば

$$c_1f_2f_3 \cdots f_s + c_2f_1f_3 \cdots f_s + \cdots + c_s f_1 \cdots f_{s-2}f_{s-1}$$

で表される $r(s-1)$ 次曲線は $r^2s(s-1)/2$ 個の交点 $L_{i,k}L_{j,l}$ ($1 \leq i < j \leq s, 1 \leq k, l \leq r$) を通る。(注: $sr(r-1)/2 + r^2s(s-1)/2 = sr(sr-1)/2$)

問題 12 ドルボー曲線の既約成分を E_1, E_2, \dots, E_{n-1} とする。 E_i は C の接線ではないので C と 2 点で交わる。 $P_{i,j} \in E_j$ とする。 $i \neq j \neq k \neq i$ のとき $P_{i,j}, P_{i,k}, P_{j,k}$ はすべて異なる既約成分上にある。 $P_{i,k} \in E_l, P_{j,k} \in E_m$ とする。 $P_{i,j}$ を E_1 と C の交点に近づけていったときの極限を考えると L_i と L_j はその点での C の接線となり、その接線上の点 $P_{i,k}$ と $P_{j,k}$ は同じ点になる。 従って、 E_l と E_m の交点は E_1 の C に関する極 (E_1 と C の二交点での C の接線の交点) である。 k を他の数字に変えて同じ考察をすれば、 E_1 以外の既約成分は一点で交わることがわかるが、 E_1 はその点を通らない。 E_1 を他の既約成分に変えても同じことが成り立つ。 E_i は直線であるから $n > 4$ のときはそのようなことはありえない。

問題 13, 14 定理 11 により、 12 個の交点 $M_i M_j$ ($1 \leq i < j \leq 4$), $M_i M_j$ ($5 \leq i < j \leq 8$) を通る三次曲線が存在するが、 この 12 個の点の中に含まれる $M_1 M_5, M_2 M_4, M_6 M_7, M_8 M_9$ は直線 E_1 上にある。 従って、 ベズーの定理により、 残る 8 点が二次曲線上にある。

問題 15 (123)(456)(789), (132)(465)(798), (147)(258)(369), (174)(285)(396), (159)(267)(348), (186)(294)(375), (168)(249)(357), (195)(276)(384), (23)(47)(59)(68), (13)(58)(49)(67), (12)(69)(48)(57), (17)(56)(29)(38), (28)(46)(19)(37), (39)(45)(18)(27), (14)(89)(26)(35), (25)(79)(16)(34), (36)(78)(15)(24)

問題 16 $h_1 = (3 + \sqrt{-1})t + (2 - \sqrt{-1})$, $h_2 = (3 - \sqrt{-1})t + (2 + \sqrt{-1})$ とすれば、 $f = 18t^3 + 66t^2 + 39t + 2$, $g = 26t^3 + 12t^2 - 27t - 11$, $h = 10t^2 + 10t + 5$. $D(f, g)$ は図 31 のような曲線となる。

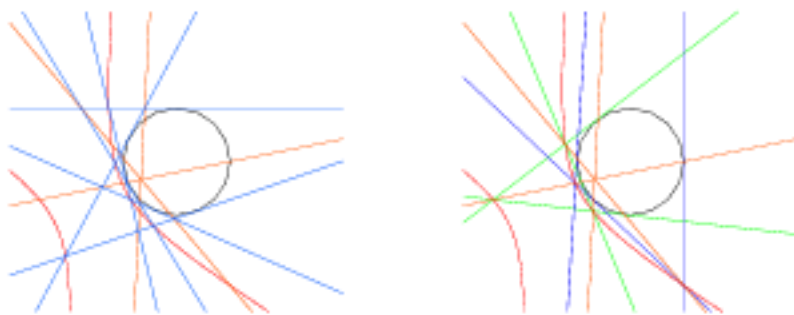


図 38: 三直線と一つの 2 次曲線

$f^2 + g^2 = h^n$ を満たす多項式を作るためのヒント n が 3 の倍数ではないとき、 $\rho = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ とし、 $h_1 = (\rho t - 1)$, $h_2 = (\rho^{-1} t - 1)$, $f = (h_1^2 + h_2^2)$, $g = (h_1^2 - h_2^2)/\sqrt{-1}$ とすればよい。 $n = 4, 5$ のときは $D(f^2, g^2)$ は下図のような曲線となる。

問題 17 f と g は共通の解を持たないという条件より \bar{h}_i ($i = 1, 2, 3$) のど

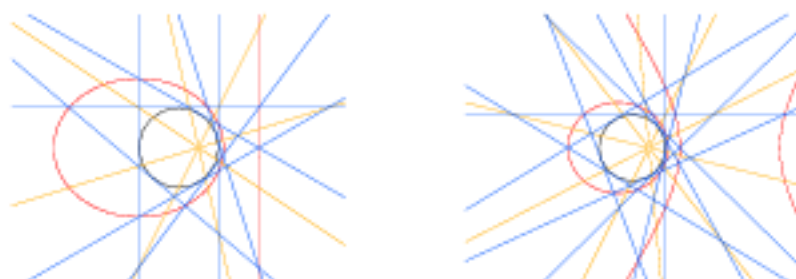


図 39: $f^2 + g^2 = h^n$ を満たす多項式に対する $D(f^2, g^2)$

の二つも共通の解を持たない。従って、 $\bar{h}_i = h_i^2$ となる一次式 h_i が存在することになる。このとき $h_1^2 + \rho^2 h_2^2 + \rho h_3^2 \equiv 0$ が成り立つが、 $h_1^2 + \rho^2 h_2^2 = 0$ は異なる二つの解を持つから、上の恒等式は成り立ち得ない。

問題 19 G の単位元ではない元 g が頂点 v_i を頂点 v_j に移すとす。 $\Gamma(G)$ の部分グラフで v_j と v_i を結ぶ辺 e_{ij} を含むものを Γ_0 とする。 Γ_0 の辺で v_i および v_j から出ているものは e_{ij} だけであるから、 g は e_{ij} をそれ自身に移す。従って、 g は v_j を v_i に移す。このことから、 $g^2 = 1$ であることがわかる。 G の任意の元 g, h に対して $ghg^{-1}h^{-1} = ghgh = (gh)^2 = 1$ であるから G はアーベル群である。

問題 21 G をヒントその一の群とすれば、 $\tau^{13} = \sigma^3 = 1, \tau\sigma = \sigma\tau^3$ であるから、 G の位数は 39 であり、 $\Gamma(G)$ は次数 6 の部分グラフ二つからなる。

問題 24 全ての i に対して $\sum_{j=1}^k d_{i,j} - 1$ が偶数となることである。

問題 25 θ は p_1 と p_2 を結ぶ辺 θ_1, p_2 と p_3 を結ぶ辺 θ_2, p_3 と p_1 を結ぶ辺 θ_3 の三つに別れる。 $\phi^{-1}(\theta_1)$ は四角形一つか二角形二つになる。

問題 28 下図の θ に対して G は位数 18 の群であり、短完全列 $0 \rightarrow \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ がある。

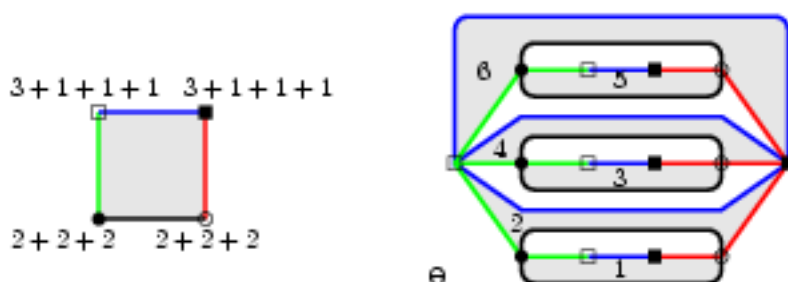


図 40: リーマン面上のグラフ VIII

問題 27 図 39 の θ に対して G は位数 24 の群であり、短完全列 $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \rightarrow G \rightarrow S_3 \rightarrow 0$ がある。

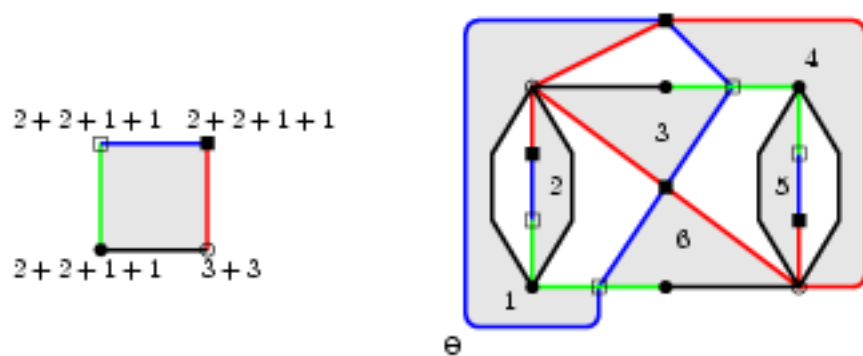


図 41: リーマン面上のグラフ IX

参考文献

- [1] 久賀道郎、ガロアの夢、日本評論社

付録

Linux, FreeBSD 等の Unix 系の OS を使っているならば、次の二行を実行すると Pascal, Darboux 等という名前のコマンドが作られる。

```
tar -xzf agc2.tgz
```

```
make
```

各コマンドの使いかたは以下の説明を参考にしてほしい。次に、

```
make drawg
```

としてエラーが出ずにコンパイルできたら drawg も使える。コンパイルエラーが出た場合は Intel 系の CPU と Linux を使っているならば、

```
http://www.cs.tohoku-gakuin.ac.jp/~tsuchi/drawg.html
```

から drawg2.tgz をとってきて解凍して得られる drawg が多分使えると思う。

Windows, Mac でも代数曲線を描くソフトと C のコンパイラがあれば、次のようにして試してみることができる。agc2.tgz を解凍した後、make があれば make でコンパイルし、なければ Makefile を参考にコンパイルする。以下の各コマンドを単独で実行し画面に表示されたものを参考に代数曲線を描くソフトを使って描かせる。例えば、

```
line a b c
```

と表示されたら、 $ax + by + c$ で表される直線を、

```
circle x y r
```

と表示されたら、 (x, y) を中心として半径 r の円を、

```
curve P(x,y)
```

と表示されたら、 $P(x, y)$ で表される代数曲線を描かせる。

以下、各コマンドの説明をする。

Pascal : 六個以上の引数が必要 (引数が奇数個の場合、最後の引数は無視する)

i 番目の引数 t_i に対して $P_i = (\cos t_i, \sin t_i)$ とし、円 $x^2 + y^2 = 1$ に内接する偶数角形 $P_1 P_2 \cdots P_n$ に対してパスカルの定理の拡張の証明を確かめる。直線 $P_i P_{i+1}$ の定義式を l_i としたとき、定数 c, d を $cl_1 l_3 \cdots l_{n-1} + dl_2 l_4 \cdots l_n$ が点 $(-1, 0)$ で 0 になるように定めて $n/2$ 次曲線を描き、 $x^2 + y^2 = 1$ で表される円が既約成分となっていることを確かめる。

```
./Pascal 1.5 4. .5 4.8 2.5 5.5
```

等としてターミナル画面上に表示される内容を確認した後

```
./Pascal 1.5 4. .5 4.8 2.5 5.5 | ./drawg -s100
```

としてみよ。

Pascal2 : 三個以上の引数が必要

i 番目の引数 t_i に対して $P_i = (\cos t_i, \sin t_i)$ とし、円 $x^2 + y^2 = 1$ に内接する多角形 $P_1 P_2 \cdots P_n$ に対してパスカルの定理の極限が正しいことを確かめる。直線 $P_i P_{i+1}$ の定義式を l_i 、 P_i における円の接線の定義式を m_i とした

とき、定数 c, d を $c_1l_2 \cdots l_n + dm_1m_2 \cdots m_n$ が点 $(-1, 0)$ で 0 になるように定めて n 次曲線を描く。

```
./Pascal2 0. 1.5 3. 5 | ./drawg -s100
```

等と実行してみよ。

以下のコマンドでは i 番目の引数 t_i に対して $(\cos t_i, \sin t_i)$ での $x^2 + y^2 - 1$ で表される円の接線を L_i とする。

Darboux : 三個以上六個以下の引数が必要
 L_1, \dots, L_n に対するドルポー曲線を描く。

```
./Darboux 0. 1. 2. 4. | ./drawg -s100
```

等とする。

Theorem11 : 六個以上の偶数個の引数が必要 (引数が奇数個の場合、最後の引数は無視する)

引数が $2n$ 個の場合、 L_1, \dots, L_n に対するドルポー曲線を定義式

$$c_1l_2l_3 \cdots l_n + c_2l_1l_3 \cdots l_n + \cdots + c_nl_1l_2 \cdots l_{n-1}$$

の係数 c_1, \dots, c_n を交点 $L_{n+1}L_{n+2}, L_{n+1}L_{n+3}, \dots, L_{n+1}L_{2n}$ を通るように定めて描き、他の交点 $L_{n+i}L_{n+j}$ ($2 \leq i < j \leq n$) も通ることを確認する。

```
./Theorem11 0. 2. 3. 4. 1. 2.5 3.5 5. | ./drawg -s80
```

等とする。

注 後半の n 個の引数に対する接線の中に平行に近いものがあるとうまく動作しない。

tangents : 一個以上の引数が必要
引数個の接線 L_1, \dots, L_n を引く。例えば **Darboux** コマンドと組み合わせて
(./Darboux 0. 1. 2. 4. | ./tangents .4 1.5 3. 4.87) | ./drawg -s100
等として使う。

4tangents1 : 四個の引数が必要
 L_1, L_2, L_3, L_4 に対するドルポー曲線が三直線に分解する場合を描く。

5tangents1 : 五個の引数が必要
 L_1, \dots, L_5 に対するドルポー曲線が二つの二次曲線に分解する場合を描く。

6tangents1 : 五個の引数が必要
六番目の接線 L_6 を $F_{1,2}, F_{3,4}, F_{5,6}$ が一直線上にあるように定め、直線と四次曲線に分解するドルポー曲線を描く。

6tangents2 : 六個の引数が必要
二次曲線と三次曲線に分解するドルポー曲線を描く。

6tangents5 : 五個の引数が必要
六番目の接線 L_6 を $F_{1,2}, F_{3,4}, F_{5,6}$ が一直線上にあるように定め、直線と二つの二次曲線に分解するドルポー曲線を描く。

6tangents7 : 三個以上の引数が必要
定理 14 の図を描く。直線 K_i, N_k は緑色、 M_j と二次曲線からなるドルポー曲線を赤色で描いている。引数が四つ以上の場合、 $J_1 = L_4$ に対して $J_i J_j$ が

ドルポー曲線上にある六直線 J_1, \dots, J_6 を青色で描く。

Theorem1.2, tangents2 は i 番目の引数 t_i に対して

$$\left(\frac{2t_i}{t_i^2 + 1}, \frac{t_i^2 - 1}{t_i^2 + 1} \right)$$

での接線を L_i とする以外は Theorem1.1, tangents と同じである。以下にいくつかの実行例を示す。

```
(./Theorem1.2 4 1 0 -1 3 .5 -.5 -3 ; ./tangents2 3.328852 0.631423
-0.327952 -1.632123 ) | drawg -s100
```

注: Theorem1.2 の最初の四つの引数 4, 1, 0, -1 は $x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x = 0$ の解であり、後半の四つの引数 3, .5, -.5, -3 は $x^4 - 9.25x^2 + 2.25 = 0$ の解である。tangents2 の引数 3.328852, 0.631423, -0.327952, -1.632123 は $(x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x) + (x^4 - 9.25x^2 + 2.25) = 0$ の近似解である。この実行例から、定理 15 が確かめられる。

```
./Theorem1.2 0.390388 0.280776 -0.640388 -1.780776 0.414214 0.281204
-0.546918 -2.414214 | drawg -s100
```

注: 最初の四つの引数 0.390388, 0.280776, -0.640388, -1.780776 は $9(x - \frac{1}{3})^2(x + 1)^2 - (x - 1)^2x^2 = 0$ の近似解であり、後半の四つの引数 0.414214, 0.281204, -0.546918, -2.414214 は $9(x - \frac{1}{3})^2(x + 1)^2 - 2(x - 1)^2x^2 = 0$ の近似解である。また、 $-1, \frac{1}{3}$ に対する $x^2 + y^2 - 1$ で表される円上の二点 $(-1, 0), (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ を通る直線 $x + 2y + 1$ は 0, 1 に対する二点 $(0, -1), (1, 0)$ での円の接線 $y + 1, x - 1$ の交点 $(1, -1)$ を通る。

この実行例から $D((x - \frac{1}{3})^2(x + 1)^2, (x - 1)^2x^2)$ は三直線に分解することがわかる。

```
./Theorem1.2 4.197148 2.346726 0.560935 0.437575 -0.424750 -0.584301
4.999636 2.163635 0.584696 0.412459 -0.396885 -0.620904 | drawg -s100
```

注: 最初の六つの引数 4.197148, 2.346726, 0.560935, 0.437575, -0.424750, -0.584301 は $16(x - 3)^2(x - 5)^2(x + .5)^2 - (x - 1)^2x^2(x + 2)^2 = 0$ の近似解であり、後半の六つの引数 4.999636, 2.163635, 0.584696, 0.412459, -0.396885, -0.620904 は $16(x - 3)^2(x - 5)^2(x + .5)^2 - 2(x - 1)^2x^2(x + 2)^2 = 0$ の近似解である。

この実行例から $D((x-3)^2(x-.5)^2(x+.5)^2, (x-1)^2x^2(x+2)^2)$ は二次曲線と三次曲線に分解することがわかる。

```
./Theorem11.2 -4. -2. -1. 2. 2.007055 -1.074656 -1.585578 -5.346822 |  
drawg -s100
```

2.007055, -1.074656, -1.585578, -5.346822 は
 $8(x+4)(x+1)(x^2-4) - x^2(x-1)^2 = 0$ の近似解である。

この実行例から $D(x^2(x-1)^2, (x+4)(x+1)(x^2-4))$ は $(0, -1), (1, 0)$ での円の接線の交点で特異点 (結節点) を持つことがわかる。

```
./Theorem11.2 4. .5 -5 -1. -4. 5.233488 0.499008 -0.536104 -0.793451  
-14.402939 | drawg -s100
```

5.233488, 0.499008, -0.536104, -0.793451, -14.402939 は
 $4(x^2-16)(x^2-1/4)(x+1) - 3x^3(x-1)^2 = 0$ の近似解である。

この実行例から $D(x^3(x-1)^2, (x^2-16)(x^2-1/4)(x+1))$ は $(0, -1), (1, 0)$ での円の接線の交点 $(1, -1)$ で特異点 (カスプ) を持つことがわかる。

slvale : 三個以上の引数が必要

代数方程式 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ の係数を引数として与えれば、実数の近似解を求める。

Theorem15, Theorem16 : 六個以上偶数個の引数が必要

前半の引数を解に持つ多項式を f , 後半の引数を解に持つ多項式を g としたとき、**Theorem15** は $D(f, g)$ を、**Theorem16** は $D(f^2, g^2)$ を赤で描き、 $(1-s)f \pm sg = 0$ の実数解に対する接線を青で描いて定理を確かめる。

```
./Theorem15 -3. 0. 1. -1. .5 4. | ./drawg -s50
```

等とする。

この本を書こうと思いついた理由の一つはある数学関連の雑誌に執筆を依頼されたことに始まる。大学の学部学生を対象として依頼されたにも関わらず、(テーマが基本群という概念を使わずには書けなかったこともあるが)はたして学部学生が読んで理解できるように書けた自信は全くなかった。その雑誌は筆者が十代の頃には高校生でも読める内容が含まれていて毎月わくわくしながら発売日を待ったことを覚えている。ところが、最近のその雑誌の内容は難しくなり、数学自体を解説した記事のほとんどはとても高校生には(たとえ、高校で習う数学には飽き足らないと考えているような学生であったとしても)読めるとは思えない。

次のことが確かめられる。

$$\left(\frac{2s_i}{s_i^2+1}, \frac{s_i^2-1}{s_i^2+1} \right), \left(\frac{2t_i}{t_i^2+1}, \frac{t_i^2-1}{t_i^2+1} \right), \left(\frac{2u_i}{u_i^2+1}, \frac{u_i^2-1}{u_i^2+1} \right)$$

での $x^2 + y^2 - 1 = 0$ の接線をそれぞれ K_i, L_i, M_i とする。定理 11 により、 L_1, L_2, \dots, L_n に対するドルポー曲線 $K_i K_j$ ($1 \leq i < j \leq n$) を通るものが一意に決まるが、三点

$$(s_1 + s_2 + \dots + s_n, s_1 s_2 + \dots + s_{n-1} s_n, \dots, s_1 s_2 \dots s_n),$$

$$(t_1 + t_2 + \dots + t_n, t_1 t_2 + \dots + t_{n-1} t_n, \dots, t_1 t_2 \dots t_n),$$

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_n, u_1 u_2 + \dots + u_{n-1} u_n, \dots, u_1 u_2 \dots u_n),$$

が一直線上にあれば、このドルポー曲線は $M_i M_j$ も通る。従って、ドルポー曲線に \mathbb{R}^n の直線が対応する。以下で n 個の数 t_1, t_2, \dots, t_n に対して上のようにそれらの基本対称式で定まる \mathbb{R}^n の点を $\alpha(t_1, t_2, \dots, t_n)$ で表すことにする。

この実行例から二点 $\alpha(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1, -1), \alpha(1, 1, 0, 0)$ を通る \mathbb{R}^4 の直線に対応するドルポー曲線は三直線に分解することがわかる。

この実行例から二点 $\alpha(s_1, s_1, s_2, s_2, s_3, s_3), \alpha(t_1, t_1, t_2, t_2, t_3, t_3)$ を通る \mathbb{R}^6 の直線に対応するドルポー曲線は二次曲線と三次曲線に分解することがわかる。

この実行例から $\alpha(0, 0, 0, 1, 1)$ を通る \mathbb{R}^5 の直線に対応するドルポー曲線は $(0, -1), (1, 0)$ での円の接線の交点 $(1, -1)$ で特異点(カスプ)を持つことがわかる。