リサージュ曲線と正葉曲線の定義式

チェビシェフ多項式を利用してリサージュ曲線と正葉曲線の定義式を求めることを考える。

1　チェビシェフ多項式

自然数 n に対して

$$\cos nt = T_n(\cos t)$$

を満たす多項式 $T_n(x)$ はチェビシェフ多項式と呼ばれる。$n = 2, 3, 4, 5$ のときは次の通りである。

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{aligned}$$

$\cos nt = T_n(\cos t)$ の t に $t - \frac{\pi}{2}$ を代入すれば, n が 4 で割った余りが 0, 1, 2, 3 の自然数のとき, それぞれ

$$\cos nt = T_n(\sin t), \quad \sin nt = T_n(\sin t), \quad \cos nt = -T_n(\sin t), \quad \sin nt = -T_n(\sin t)$$

が成り立つことがわかる。

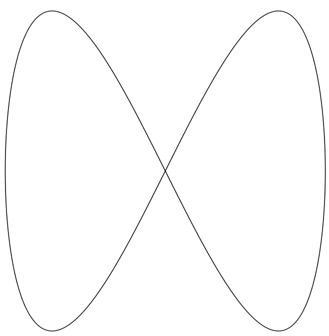
2　リサージュ曲線の定義式

m, n を互いに素な自然数とするとき,

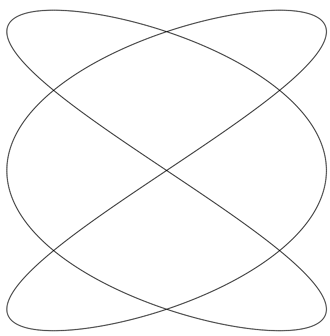
$$x = \cos mt, \quad y = \sin nt$$

で表される曲線はリサージュ曲線と呼ばれる。

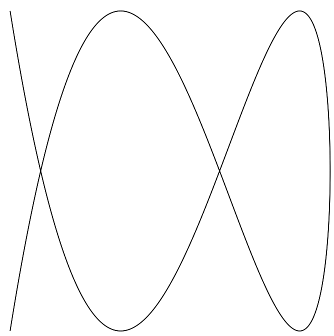
$m = 1, n = 2$



$m = 3, n = 2$



$m = 2, n = 5$



定理 1. m, n を互いに素な自然数とする。m が奇数のとき,

$$T_n^2(\cos mt) + T_m^2(\sin nt) \equiv 1$$

であり, m が 4 の倍数のとき

$$T_n(\cos mt) \equiv T_m(\sin nt)$$

であり, m を 4 で割った余りが 2 のとき

$$T_n(\cos mt) \equiv -T_m(\sin nt)$$

である。

証明　$\cos nt = T_n(\cos t)$ の t に mt を代入すると $\cos mnt = T_n(\cos mt)$ となる。m を奇数とする。$\pm\sin mt = T_m(\sin t)$ の t に nt を代入すると $\pm\sin mnt = T_m(\sin nt)$ となる。したがって, $T_n(\cos mt)^2 + T_m(\sin nt)^2 \equiv 1$ である。

次に, m が 4 の倍数であるとする。$\cos mt = T_m(\sin t)$ の t に nt を代入すると $\cos mnt = T_m(\sin nt)$ であるから, $T_n(\cos mt) \equiv T_m(\sin nt)$ が成り立つ。m を 4 で割った余りが 2 のときも同様である。 ■

$x = \cos mt,\ y = \sin nt$ とする。例えば $m = 1,\ n = 2$ のときは上の定理により, x, y は

$$(2x^2 - 1)^2 + y^2 - 1 = 0$$

を満たす。$m = 3,\ n = 2$ のときは

$$(2x^2 - 1)^2 + (4y^3 - 3y)^2 - 1 = 0$$

を満たす。$m = 2,\ n = 5$ のときは

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + 2y^2 - 1 = 0$$

を満たす。

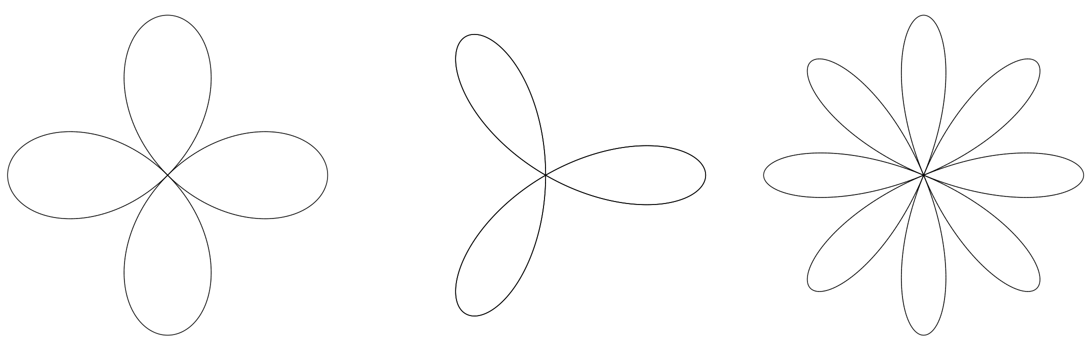
3　正葉曲線の定義式

m, n を互いに素な自然数とするとき,

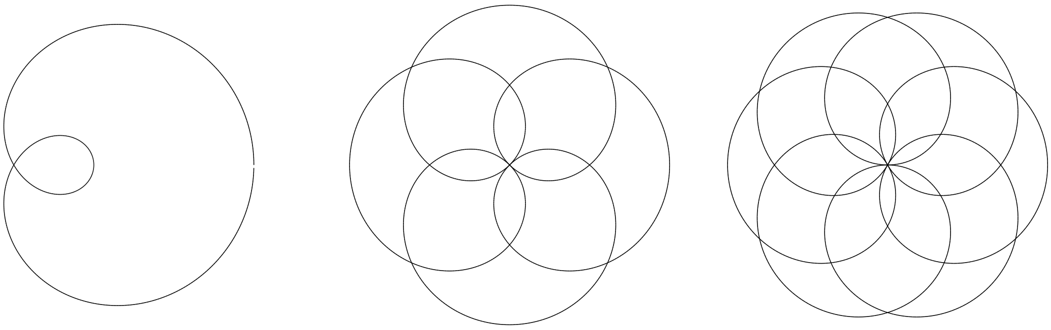
$$x = (\cos mt)(\cos nt), \quad y = (\cos mt)(\sin nt)$$

で表される曲線は正葉曲線と呼ばれている。極座標 (r, θ) を使えば, $r = \cos \frac{m}{n}\theta$ と表せる。

$m = 2,\ n = 1$　　$m = 3,\ n = 1$　　$m = 4,\ n = 1$



$m=1,\ n=3$ $m=2,\ n=3$ $m=3,\ n=4$



チェビシェフ多項式 $T_m(x)$ は m が奇数 (resp. 偶数) のときは奇数次 (resp. 偶数次) の項だけであるから, $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ を使えば, $\cos mt = G_m(\cos t, \sin t)$ を満たす m 次の二変数斉次多項式 $G_m(u,v)$ を求めることができる。例えば、

$$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t = 4\cos^3 t - 3(\cos t)(\cos^2 + \sin^2 t) = \cos^3 t - 3(\cos t)(\sin^2 t)$$

であるから, $G_3(u,v) = u^3 - 3uv^2$ である。

$$x = (\cos mt)(\cos nt), \quad y = (\cos mt)(\sin nt)$$

とする。G_m は m 次斉次多項式であるから,

$$G_m(x,y) = (\cos^m mt)G_m(\cos nt, \sin nt) = (\cos^m mt)(\cos mnt) = (\cos^m mt)T_n(\cos mt)$$

である。m, n が共に奇数のときは $U_{\frac{n+1}{2}}$ を $U_{\frac{n+1}{2}}(X^2) = XT_n(X)$ を満たす $\frac{n+1}{2}$ 次多項式とすれば, $x^2+y^2 = \cos^2 mt$ であるから, $(\cos mt)T_n(\cos mt) = U_{\frac{n+1}{2}}(x^2+y^2)$ である。したがって, x, y は

$$G_m(x,y) - (x^2+y^2)^{\frac{m-1}{2}} U_{\frac{n+1}{2}}(x^2+y^2) = 0$$

を満たす。例えば, $m=1$, $n=3$ のときは $G_1(x,y)=x$, $U_2(X) = 4X^2-3X$ であるから,

$$x - 4(x^2+y^2)^2 + 3(x^2+y^2) = 0$$

である。$m=3$, $n=1$ のときは $G_3(x,y) = x^3-3xy^2$, $U_1(X) = X$ であるから,

$$x^3 - 3xy^2 - (x^2+y^2)^2 = 0$$

である。m, n のいずれかが偶数のときは V_n を $V_n(X^2) = T_n(X)^2$ を満たす n 次多項式とすれば, $T_n(\cos mt)^2 = V_n(x^2+y^2)$ である。したがって, x, y は

$$G_m(x,y)^2 - (x^2+y^2)^m V_n(x^2+y^2) = 0$$

を満たす。例えば, $m=2$, $n=3$ のときは $G_2(x,y) = x^2-y^2$, $V_3(X) = 16X^3-24X^2+9X$ であるから,

$$(x^2-y^2)^2 - 16(x^2+y^2)^5 + 24(x^2+y^2)^4 - 9(x^2+y^2)^3 = 0$$

である。

図を見ればわかるように, 正葉曲線は対称的な図形である。$G(x, y)$ と $x^2 + y^2$ の y の次数はすべて偶数であるから, 上の定義式は x 軸に関して対称であることがわかる。以下で, 原点を中心として $\frac{2\pi}{m}$ の回転でも変わらないことを示す。$x^2 + y^2$ は任意の回転で変わらないので

$$G_m(\left(\cos\frac{2\pi}{m}\right)x - \left(\sin\frac{2\pi}{m}\right)y, \left(\sin\frac{2\pi}{m}\right)x + \left(\cos\frac{2\pi}{m}\right)y) = G_m(x, y) \tag{1}$$

を示せばよい。

$$\begin{aligned} & G_m(\left(\cos\frac{2\pi}{m}\right)\cos t - \left(\sin\frac{2\pi}{m}\right)\sin t, \left(\sin\frac{2\pi}{m}\right)\cos t + \left(\cos\frac{2\pi}{m}\right)\sin t) \\ = \ & G_m(\cos\left(\frac{2\pi}{m} + t\right), \sin\left(\frac{2\pi}{m} + t\right)) \\ = \ & \cos(m\left(\frac{2\pi}{m} + t\right)) = \cos mt = G_m(\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

である。$G_m(x, y)$ は斉次多項式であるから, (1) が成り立つ。