4次元以上の双曲空間上の等面単体

4次元以上では様々な等面単体が存在し, 次元が異なれば, 現れる等面単体の様相も異なる。例えば, 一つの頂点から出ている辺の長さがすべて異なる等面単体は頂点の個数 (= 次元 + 1) が 2 の冪のときにしか現れない。本稿では, 2節で等面単体であるための必要十分条件の一つを与えてから, 3節で 4, 5次元の等面単体, 4節で頂点の個数が素数の等面単体, 5節で一つの頂点から出ている辺の長さがすべて異なる等面単体を考察する。以下, 「双曲平面上の幾何学」第5章の記号を使う。

1　準備

等面単体を考察するための準備として双曲空間 Δ の等長変換は V の擬内積を保つ線形変換から得られる (定理 6) ことを示す。

$$\mathrm{HO}(V) = \{\beta \in \mathrm{GL}(V) \mid \beta(l)\cdot\beta(m) = l\cdot m \text{ for } {}^\forall l, m \in V\}$$

とする。$m^2 \neq 0$ を満たす V の元 m に対して V の線形変換 β_m を双曲平面の場合と同様に

$$\beta_m(l) = l - 2\frac{l\cdot m}{m^2}m$$

と定義する。$\beta_m \in \mathrm{HO}(V)$ である。$l_1, l_2 \in V_-$ に対して $[l_1]$ と $[l_2]$ の間の距離は双曲平面の場合と同様に

$$d([l_1],[l_2]) = \log\left(-l_1\cdot l_2 + \sqrt{(l_1\cdot l_2)^2 - 1}\right)$$

である。関数 $-x + \sqrt{x^2-1}$ は $(-\infty, -1]$ の範囲で単調減少であるから, 次が成り立つ。

補題 1. $l_1, m_1, l_2, m_2 \in V_-$ に対して $d([l_1],[m_1]) = d([l_2],[m_2])$ であるための必要十分条件は $l_1\cdot m_1 = l_2\cdot m_2$ である。

相異なる V_- の元 l_1, l_2 に対して P 超平面 $[l_1 - l_2]$ は線分 $[l_1][l_2]$ の中点 $[l_1 + l_2]$ を通り, $[l_1]$, $[l_2]$ を通る任意の P 超平面に直交するから, $[l_1][l_2]$ の**垂直二等分面**である。V_+ の元 m に対して Δ の P 超平面 $[m]$ に関する鏡映を $\alpha_{[m]}$ とすれば, $l \in V_-$ に対して線分 $[l][\beta_m(l)]$ の垂直二等分面は $[m]$ であるから,

$$\alpha_{[m]}([l]) = [\beta_m(l)]$$

である。P 点 $[l]$ が P 超平面 $[m]$ 上にあるための必要十分条件は $l\cdot m = 0$ であるから, 次が成り立つ。

補題 2. 相異なる V_- の元 l_1, l_2, m に対して $[m]$ が $[l_1 - l_2]$ 上にあるための必要十分条件は $l_1\cdot m = l_2\cdot m$ である。

上の 2 つの補題より, 次が成り立つ。

系 3. P_1, P_2 を相異なる P 点とするとき, P 点 Q が線分 P_1P_2 の垂直二等分面上にあるための必要十分条件は $d(P_1, Q) = d(P_2, Q)$ である。

Δ 上の任意の P 点 P に対して $P = [l]$ となる V_- の元 l が唯一つ決まるから, $\mathrm{HO}(V)$ の元 β に対して Δ をそれ自身に移す写像 $\alpha(\beta)$ を

$$\alpha(\beta)([l]) = [\beta(l)] \quad \text{for} \quad l \in V_-$$

と定義する。補題 1 より, この写像 $\alpha(\beta)$ は等長変換である。

定理 4. $\mathrm{HO}(V)$ の元 β_1, β_2 に対して $\alpha(\beta_2) \circ \alpha(\beta_1) = \alpha(\beta_2 \circ \beta_1)$ である。

証明　V_- の任意の元 l に対して

$$\begin{aligned}(\alpha(\beta_2) \circ \alpha(\beta_1))([l]) &= \alpha(\beta_2)(\alpha(\beta_1)([l])) = \alpha(\beta_2)([\beta_1(l)]) \\ &= [\beta_2(\beta_1(l))] = [(\beta_2 \circ \beta_1)(l)] = \alpha(\beta_2 \circ \beta_1)([l])\end{aligned}$$

である。 ■

定理 5. k を 3 以上 $n+1$ 以下の整数とする。相異なる k 個の P 点の 2 組 $\{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$, $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_k\}$ に対して $\mathrm{HO}(V)$ の元 β で $1 \leq i \leq k$ に対して $\alpha(\beta)(P_i) = Q_i$ を満たすものが存在するための必要十分条件は $1 \leq i < j \leq k$ に対して $d(P_i, P_j) = d(Q_i, Q_j)$ となることである。

証明　必要条件であることは明らかである。

$P_1 = Q_1$ のときは $\alpha_1 = \mathrm{id}$ とし, $P_1 \neq Q_1$ のときは α_1 を線分 P_1Q_1 の垂直二等分面に関する鏡映とする。いずれの場合も $\alpha_1(P_1) = Q_1$ である。$\alpha_1(P_2) = Q_2$ のときは $\alpha_2 = \mathrm{id}$ とし, $\alpha_1(P_2) \neq Q_2$ のときは α_2 を線分 $\alpha_1(P_2)Q_2$ の垂直二等分面に関する鏡映とする。

$$d(\alpha_1(P_2), Q_1) = d(\alpha_1(P_2), \alpha_1(P_1)) = d(P_2, P_1) = d(Q_2, Q_1)$$

であるから, 系 3 より, $(\alpha_2 \circ \alpha_1)(P_1) = \alpha_2(Q_1) = Q_1$ である。この操作を繰り返して $\alpha = \alpha_k \circ \cdots \circ \alpha_2 \circ \alpha_1$ とすれば, $1 \leq i \leq k$ に対して $\alpha(P_i) = Q_i$ である。$\alpha_i = \mathrm{id}$ のときは $\beta_i = \mathrm{id}$ とし, α_i が P 超平面 $[m]$ に関する鏡映のときは $\beta_i = \beta_m$ として $\beta = \beta_k \circ \cdots \circ \beta_2 \circ \beta_1$ とすれば, 定理 4 より $\alpha = \alpha(\beta)$ である。 ■

定理 6. $f : \Delta \to \Delta$ を等長変換, 即ち, 任意の P 点 P, Q に対して $d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$ を満たす写像とすれば, $\mathrm{HO}(V)$ の元 β で $f = \alpha(\beta)$ となるものが存在する。

証明　$l_0 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 1)$, $l_i = x_i + \sqrt{2} l_0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とし, $Q_i = [l_i]$ とする。最初に, $0 \leq i \leq n$ に対して $f(Q_i) = Q_i$ ならば, f は恒等写像であることを示す。任意の P 点 P に対して l, m を $P = [l]$, $f(P) = [m]$ となる V_- の元とする。$l_i \in V_-$ で

あり, $d(P,Q_i)=d(f(P),Q_i)$ であるから, 補題 1 より, $l\cdot l_i=m\cdot l_i$ である。したがって, $l=m$ である。即ち, $f(P)=P$ である。

定理 5 より, $0\le i\le n$ に対して $f(Q_i)=\alpha(\beta)(Q_i)$ となる $\mathrm{HO}(V)$ の元 β が存在する。$(\alpha(\beta)^{-1}\circ f)(Q_i)=Q_i$ であるから, $\alpha(\beta)^{-1}\circ f$ は恒等写像である。即ち, $f=\alpha(\beta)$ である。 ■

2　等面単体であるための必要十分条件

等面単体とはすべての $n-1$ 次元面が合同な単体である。S を P 点 P_0, P_1, ..., P_n を頂点とする単体とし,

$$G(S)=\{\alpha\mid\alpha\text{ は }S\text{ を }S\text{ に移す }\Delta\text{ の等長変換}\}$$

とする。

定理 7. S, P_i, $G(S)$ を上の通りとするとき, S が等面単体であるための必要十分条件は $G(S)$ が $\{P_0,P_1,\ldots,P_n\}$ に推移的に作用することである。

証明　P_i を含まない S の $n-1$ 次元面を F_i とする。P_0 を P_i に移す $G(S)$ の元は F_0 を F_i に移すから, 十分条件であることは明らかである。

S が等面単体であるとする。g_i を F_0 を F_i に移す等長写像とする。P を F_0 の任意の頂点とし, $g_i(P)=Q$ とする。辺 P_0P と同じ長さの辺が F_0 内に k 本, S 内に m 本あるとする。P を含まない S の $n-1$ 次元面内にも P_0P と同じ長さの辺が k 本あるから, P を端点とする P_0P と同じ長さの辺が F_0 内に $m-k-1$ 本ある。したがって, Q を端点とする P_0P と同じ長さの辺も F_i 内に $m-k-1$ 本ある。Q を端点とする S 内の P_0P と同じ長さの辺は $m-k$ 本であるから, 辺 QP_i の長さは P_0P のそれに等しくなければならない。したがって, $\{P_0,P_1,\ldots,P_n\}$, $\{P_i,g_i(P_1),\ldots,g_i(P_n)\}$ は定理 5 の条件を満たすから, P_0 を P_i へ移す $G(S)$ の元が存在する。 ■

l_i を $P_i=[l_i]$ となる V_- の元とし, $O=[l_0+l_1+\cdots+l_n]$ とする。S が等面単体ならば, O は $G(S)$ の固定点であるから, S の外心である。また, $G(S)$ は S の $n-1$ 次元面集合に推移的に作用するから, O は S の内心でもある。

3　$n=4,5$ の場合

S を等面単体とし, 同じ長さの辺が S 内に m 本, 各 $n-1$ 次元面内に k 本あるとすると $m=(n+1)k/(n-1)$ である。

$n=4$ のとき, S 内の同じ長さの辺の本数は 5 の倍数である。S 内の辺は 10 本であるから, すべての辺が同じ長さであるか, 同じ長さの辺が 5 本づつである。前者の場合, S は

正単体であり, $G(S)$ は 5 次の対称群に同型である。後者の場合は各頂点から, 同じ長さの辺が 2 本づつ出ているから, 同じ長さの辺が輪を作る。その輪の一つの長さは 3 以上であるから, 5 である。したがって, $G(S)$ は位数 10 の二面体群 D_{10} に同型である。

$n=5$ のとき, $m=6k/4$ であるから, S 内の同じ長さの辺の本数は 3 の倍数である。同じ長さの辺が 3 本の組が 2 つあるとする。それらに含まれる 6 本は一つの輪を作る。S は等面単体であるから, その輪のどの頂点を除いても, できる鎖の両端の頂点を結ぶ辺の長さは同じである。したがって, 同じ長さの辺を同じ色の線で表したグラフは図 1 の (i) か (ii) となる。このとき, $G(S)$ は位数 6 の二面体群 D_6 に同型である。次に, 同じ長さの辺が 3 本の組が 1 つだけとする。残りの 12 本の辺は全部同じ長さか同じ長さの辺が 6 本づつとなる。前者の場合は図 1 の (vi) であり, $G(S)$ は半直積 $(\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_2)\rtimes S_3$ に同型である。後者の場合は同じ長さの 6 本の辺は一つの輪を作るか長さが 3 の 2 つの輪を作ることとどの頂点を除いても残る 5 頂点のグラフが同型であることから, (iii) しかありえないことがわかる。このとき, $G(S)$ は位数 12 の二面体群 D_{12} に同型である。同じ長さの辺が 3 本の組が 1 つもないときは同じ長さの辺が 6 本の組と 9 本の組ができるから, (iv) か (v) となる。$G(S)$ は前者の場合は D_{12} に同型であり, 後者の場合は半直積 $(D_6\times D_6)\rtimes\mathbf{Z}_2$ に同型である。

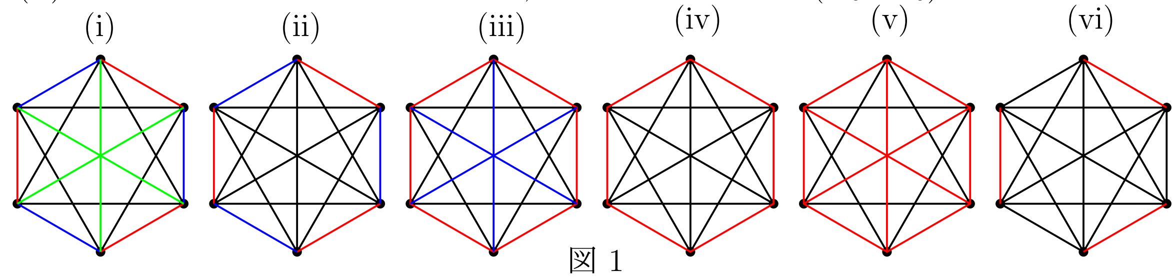

図 1

$G(S)$ が上記の群となる単体 S は正単体を利用して構成できる。$Q_0Q_1\cdots Q_n$ を $\mathbf{R}^n$ 内の重心 (=外心) が原点の正単体とする。$Q_i=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ のとき,

$$l_i=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n+\frac{1}{2}\sqrt{c_1^2+c_2^2+\cdots+c_n^2+1}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+1)$$

とすれば, $l_0^2=l_1^2=\cdots=l_n^2=-1$ であり, $i\neq j$ のとき $l_i\cdot l_j=l_0\cdot l_1<-1$ である。$n=4$ とする。$0\leq i\leq 4$ に対して $m_i=l_i+l_{i+1}$ とする。ここで $l_5=l_0$ である。このとき, m_0, m_1, m_2, m_3, m_4 は線形独立である。$m_0^2=m_1^2=\cdots=m_4^2=-2+2l_0\cdot l_1$, $m_0\cdot m_1=\cdots=m_3\cdot m_4=m_4\cdot m_0=-1+3l_0\cdot l_1$, $m_0\cdot m_2=m_1\cdot m_3=m_2\cdot m_4=m_3\cdot m_0=m_4\cdot m_1=4l_0\cdot l_1$ であるから, 補題 1 と定理 5 より, $G([m_0][m_1][m_2][m_3][m_4])\simeq D_{10}$ である。

次に, $n=5$ とする。$m_0=l_0+l_1$, $m_1=l_1+l_2$, $m_2=l_2+l_0$, $m_3=l_3+l_4$, $m_4=l_4+l_5$, $m_5=l_5+l_3$ とすれば, m_0, m_1, $\ldots$, m_5 は線形独立である。$m_0^2=m_1^2=\cdots=m_5^2=-2+2l_0\cdot l_1$, $m_0\cdot m_1=m_1\cdot m_2=m_2\cdot m_0=m_3\cdot m_4=m_4\cdot m_5=m_5\cdot m_3=-1+3l_0\cdot l_1$ であり, $0\leq i\leq 2$, $3\leq j\leq 5$ に対して $m_i\cdot m_j=4l_0\cdot l_1$ である。したがって, $G([m_0][m_1]\cdots[m_5])\simeq(D_6\times D_6)\rtimes\mathbf{Z}_2$ である。他の群に対しても同様にして, $G(S)$ がその群に同型となる単体

S を構成できる。

4 頂点の個数が素数の等面単体

S は等面単体であるとし, 頂点の個数 $n+1$ が素数であるとする。定理 7 より, $G(S)$ の位数 $|G(S)|$ は $n+1$ の倍数である。したがって, コーシーの定理より, $G(S)$ は位数 $n+1$ の元を含む。その一つを g とする。S の頂点の一つを P_0 とし, $P_i = g^i P_0$ $(1 \leq i \leq n)$ とする。$gP_0 = P_0$ ならば, $\langle g \rangle$ は S の P_0 以外の頂点の集合に効果的に作用するから, g の位数は $n!$ の約数でなければならない。したがって, $P_1 \neq P_0$ である。また, $0 \leq i < j \leq n$ に対して $P_i = P_j$ ならば, $P_{j-i} = P_0$ であるから, $j-i$ は $n+1$ の約数であることになってしまう。したがって, $P_0, P_1, \ldots, P_n$ はすべて異なるから, S のすべての頂点である。

$$d(P_{n+1-i}, P_{n+1-j}) = d(g^{i+j} P_{n+1-i}, g^{i+j} P_{n+1-j}) = d(P_j, P_i)$$

であるから, 定理 5 より P_i を P_{n+1-i} に移す元が $G(S)$ の中に存在する。したがって, $G(S)$ は位数 $2(n+1)$ の二面体群を含む。$2 \leq i \leq \frac{n}{2}$ に対して $d(P_i, P_0) \neq d(P_1, P_0)$ ならば, $G(S)$ の任意の元は辺 $P_0P_1, \ldots, P_{n-1}P_n, P_nP_0$ の輪をそれ自身に移すから, $|G(S)| = 2(n+1)$ である。

次に, $2(n+1) < |G(S)| < (n+1)!$ となる等面単体 S が存在するか考える。$\mathbf{Z}_{n+1}^{\times} = \{1, 2, \ldots, n\}$ を $n+1$ を法とする乗法群とする。F を $\mathbf{Z}_{n+1}^{\times}$ の真部分群で $\{1, n\}$ を真に含むものとする。すべての $0 \leq i < j \leq n$, $(k, m) \in \mathbf{Z}_{n+1} \rtimes F$ に対して $d(P_i, P_j) = d(P_{k+mi}, P_{k+mj})$ であるとする。このとき, 定理 5 により $G(S)$ は $\mathbf{Z}_{n+1} \rtimes F$ を含む。また, $j-i \in F$ ならば $i = i + (j-i) \cdot 0$, $j = i + (j-i) \cdot 1$ であるから, $d(P_i, P_j) = d(P_0, P_1)$ であるが, $j - i \notin F$ のときは $d(P_i, P_j) \neq d(P_0, P_1)$ であるとすれば, $|G(S)| < (n+1)!$ である。

$n = 4, 6, 10$ のときは上の条件を満たす F は存在しないが, $n = 12$ のときは $F = \{1, 5, 8, 12\}, \{1, 3, 4, 9, 10, 12\}$ は条件を満たす。また, 上の条件を満たす等面単体 S は次のようにして構成できる。$l_0, l_1, \ldots, l_n$ を前節の通りとする。$0, 1, \ldots, n$ の任意の置換 σ に対して $\mathrm{HO}(V)$ の元 g で $gl_i = l_{\sigma(i)}$ となるものが存在するから, 単射準同型 $\lambda : \mathbf{Z}_{n+1} \rtimes F \to \mathrm{HO}(V)$ で $\lambda((k, m))l_i = l_{k+mi}$ となるものが存在する。c を正の実数とし,

$$p_0 = l_0 + c \sum_{m \in F} l_m, \quad p_i = \lambda((i, 1))p_0 = l_i + c \sum_{m \in F} l_{i+m} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

とすれば, $\lambda((k, m))p_i = p_{k+mi}$ であるから,

$$\{\alpha(\lambda(k, m)) \mid (k, m) \in \mathbf{Z}_{n+1} \rtimes F\} \subset G([p_0][p_1] \cdots [p_n])$$

である。さらに, $1 \in F$, $0 \in 1 + F$ だから

$$p_0 \cdot p_1 = (1 + |F|c)^2 l_0 \cdot l_1 - (2c + |(1+F) \cap F|c^2)(1 + l_0 \cdot l_1)$$

であり, $j-i \notin F$ のとき, $j \notin i+F$, $i \notin j+F$ だから

$$p_i \cdot p_j = (1+|F|c)^2 l_0 \cdot l_1 - (|(j-i+F) \cap F|c^2)(1+l_0 \cdot l_1)$$

であるから, 有限個の c を除いて $j-i \notin F$ のとき $p_i \cdot p_j \neq p_0 \cdot p_1$ である。

5　一つの頂点から出ている辺の長さがすべて異なる等面単体

$\mathbf{R}^3$ の等面四面体は直方体の 8 個の頂点の中の 4 つの頂点からできるが, 頂点の個数が 2 の冪のとき, 類似の構造を持つ等面単体が存在する。

定理 8. S が n 次元双曲空間上の等面単体で各頂点から出ている n 本の辺の長さがすべて異なれば, $n+1=2^k$ (k は 2 以上の整数) であり, $G(S)$ は位数 2 の巡回群の k 個の直和に同型である。

証明　仮定より, $G(S)$ の元が一つの頂点を動かさなければ, 他の頂点も動かさないから, 恒等写像である。したがって, 定理 7 より $|G(S)| = n+1$ であるから, $G(S)$ の単位元以外のすべての元の位数が 2 であることを示せばよい。

g を $G(S)$ の単位元ではない任意の元とする。P_0 を S の頂点の一つとし, $P_1 = gP_0$ とする。P_0P_1 と同じ長さの辺は P_0, P_1 からは他に出ていないから, $gP_1 = P_0$ である。P_2 を P_0, P_1 と異なる S の任意の頂点とし, P_3 を $d(P_0,P_1) = d(P_2,P_3)$ となる S の頂点とすれば, $P_0 \neq P_3 \neq P_1$ である。P_4 を $d(P_3,P_4) = d(P_0,P_2)$ となる S の頂点とする。P_0P_1 と同じ長さの辺と P_0P_2 と同じ長さの辺は輪を作るが, P_0 を除いてできる鎖の両端の頂点を結んでできる辺 P_1P_2 と P_3 を除いたときのそれ P_2P_4 は同じ長さであるから, $P_4 = P_1$ である。すると $d(P_0,P_2) = d(P_1,P_3)$ であるから, g は辺 P_0P_2 を P_1P_3 に移す。したがって, $gP_2 = P_3$ である。故に, g は辺 P_0P_1 と同じ長さの辺の両端の頂点を入れ替えるから位数は 2 である。 ■

S を上の定理の単体とし, P_0 をその頂点の一つとする。l_0 を $[l_0] = P_0$ となる V_- の元とすれば, $G(S)$ の任意の元 g に対して $[\beta(g)l_0]$ は S の頂点である。ここで $\beta(g)$ は定理 6 により, $g = \alpha(\beta(g))$ となる $\mathrm{HO}(V)$ の元である。また, $m = \sum_{g \in G(S)} \beta(g)l_0$ とすれば, $O = [m]$ は S の外心である。H を $G(S)$ の指数 2 の部分群とし, $m(H) = \sum_{g \in H} \beta(g)l_0$ とする。$G(S) \setminus H$ の任意の元 g に対して $m(H) + \beta(g)m(H) = m$ であるから, O は線分 $[m(H)][\beta(g)m(H)]$ の中点である。

$$h = (m(H) \cdot l_0)m - (m \cdot l_0)m(H)$$

とすれば, $[h]$ は P 直線 $[m][m(H)]$ に直交し, $[l_0]$ を通る P 超平面である。H の任意の元 g に対して $\beta(g)h = h$ であるから, gP_0 も $[h]$ 上にある。したがって, S の頂点の半分は $[h]$

上にあり, $\frac{n-1}{2}$ 次元の等面単体の頂点である。$G(S)\setminus H$ の元 g に対して $h'=\beta(g)h$ とすれば, $[h']$ も P 直線 $[m][m(H)]$ に直交し, $[h]$ 上にない S の頂点は $[h']$ 上にある。F を H と異なる $G(S)$ の指数 2 の部分群とする。$F\setminus H$ の元 g に対して $\beta(g)m(F)=m(F)$ であり, 線分 $[\beta(g)m(H)][m(H)]$ の中点が O であるから, P 直線 $O[m(H)]$ と P 直線 $O[m(F)]$ は直交する。$G(S)$ の指数 2 の部分群は n 個あるから, S の頂点は上記の P 超平面 $[h]$, $[h']$ でできる $2n$ 面体の頂点である。

以下で, 上記の単体を構成するが, 3 節のような正単体を利用した方法では構造がわかりにくいので違う構成をする。A_k を以下のような $k\times(2^k-1)$ 行列とする。

$$A_2=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_k=\begin{pmatrix} -1\cdots-1 & 1\cdots1 \\ B_{k-1} & A_{k-1} \end{pmatrix}$$

ここで B_k は $k\times 2^k$ 行列で i 行目は最初の 2^{k-i} 番目までの成分が -1 で次の 2^{k-i} 個の成分が 1 で, 以下その繰り返しである。E_i を (j,j) 成分が A_k の (i,j) 成分である 2^k-1 次対角行列とし, E_1, E_2, …, E_k で生成される直交行列の群を G とする。単位行列以外の G の各元の位数は 2 であるから, G は $\mathbf{Z}_2$ の直和に同型である。また, G が以下の性質を持つことも帰納的に確かめられる。

1. G の位数は 2^k であり, 単位行列以外の G の各行列の成分の中に -1 は 2^{k-1} 個ある。
2. 1 から 2^k-1 までの相異なる任意の i, j に対して G の中に (i,i) 成分は 1 で, (j,j) 成分が -1 となるものがある。

n 次直交行列 E の V への作用を $E\,{}^t(a_1,a_2,\ldots,a_n)={}^t(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ のとき,

$$\begin{aligned} & E\left(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+a_0(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+1)\right) \\ = \ & b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n+a_0(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+1) \end{aligned}$$

と定義する。この作用は擬内積を保つ。a_1, a_2, …, a_n を正の実数とし,

$$l_0=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+\frac{1}{2}a_0(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+1)\ \ (a_0=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+1})$$

とする。$\{gl_0\mid g\in G\}$ を頂点とする単体を S とする。G の性質 1. より, G の単位元でない元 g に対して $l_0\cdot l_0-(gl_0)\cdot l_0$ は a_1, a_2, …, a_n の中の 2^{k-1} 個の平方の和の 2 倍であるから, それらがすべて異なるようにすれば, S の $[l_0]$ から出ている辺の長さがすべて異なるようにできる。$\sum_{g\in G} gl_0=2^{k-1}a_0(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+1)$ である。H_i を (i,i)

成分が 1 の行列からなる G の部分群とすれば, G の性質 2. より, $[G : H_i] = 2$ であり, $\sum_{g \in H_i} gl_0 = 2^{k-1} a_i x_i + 2^{k-2} a_0 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 1)$ である。

$$h_i^{\pm} = \pm a_0 x_i + \frac{1}{2} a_i (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 1)$$

とすれば, $[h_i^{\pm}]$ は P 直線 $[\sum_{g \in G} gl_0][\sum_{g \in H_i} gl_0]$ に直交する P 超平面であり, S の頂点の半分づつが $[h_i^+]$ と $[h_i^-]$ の上にある。このような構造の等面単体は $G(S)$ がアーベル群であることからも特徴付けられる。

定理 9. S が n 次元等面単体で $G(S)$ が S の頂点集合に推移的に作用するアーベル群 G_0 を含めば, $|G_0| = n + 1$ であり, G_0 が位数 3 以上の元を含めば, $G_0 \neq G(S)$ である。

証明　P_0 を S の頂点の一つとする。G_0 の元 g_0 と S の頂点 P_1 で $g_0 P_0 = P_0$, $g_0 P_1 \neq P_1$ となるものが存在したと仮定する。仮定より, $g_1 P_0 = P_1$ となる G_0 の元 g_1 が存在する。すると $g_1 g_0 P_0 = P_1$, $g_0 g_1 P_0 = g_0 P_1$ となり, G_0 がアーベル群であることに矛盾する。したがって, $|G_0| = n + 1$ である。g_1, g_2 を G_0 の任意の元とすれば,

$$d(g_1^{-1} P_0, g_2^{-1} P_0) = d((g_1 g_2)(g_1^{-1} P_0), (g_1 g_2)(g_2^{-1} P_0)) = d(g_2 P_0, g_1 P_0)$$

であるから, 定理 5 により, gP_0 を $g^{-1} P_0$ に移す $G(S)$ の元 f が存在する。G_0 の元 g の位数が 3 以上であるとすれば, $gfP_0 = gP_0$, $fgP_0 = g^{-1} P_0 \neq gP_0$ であるから, $f \notin G_0$ である。 ■

系 10. S が n 次元等面単体で $G(S)$ がアーベル群ならば, $|G(S)| = n + 1$ であり, $G(S)$ の単位元以外のすべての元の位数は 2 である。